École universitaire Paris-Saclay — Licence de mathématiques (L3)
Année universitaire 2024/2025 — MEU 302 Algèbre

Feuille d'exercices n°2 : Études et réduction d'endomorphismes

Entraînement

Exercice I

On considère l'endomorphisme f de $\mathbf{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

(1) Déterminer la nature de f et ses éléments caractéristiques.
(2) Déterminer une base de $\mathbf{R}^3$ dans laquelle la matrice de f a une écriture plus simple.

Exercice II

Soit $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ -6 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.
(1) Montrer qu'il existe une matrice D diagonale telle que $A = PDP^{-1}$.
(2) En déduire l'expression de A^n lorsque $n \in \mathbf{N}$.
(3) Quelle est la nature de l'endomorphisme associé à A ?

Exercice III

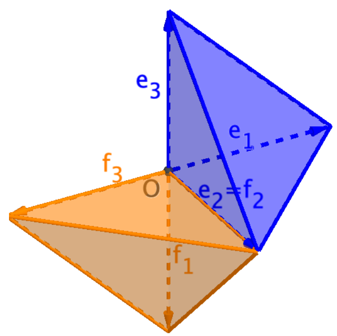
Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de $\mathbf{R}^3$ et f un endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ tel que

$$f(e_1) = e_1 + e_3,\ \ f(e_1 + e_2) = e_1 + e_2 + e_3 \text{ et } f(e_1 + e_2 + 2e_3) = e_1 + e_2 + e_3.$$

(1) Justifiez pourquoi un tel endormorphisme existe. Est-il unique ?
(2) Placer les vecteurs de $\mathcal{B}$ et leur image sur un dessin. Pouvez-vous deviner la nature de f ?
(3) Donner les images par f des vecteurs de la base $\mathcal{B}$ à l'aide du dessin. Déduisez-en sa matrice dans la base $\mathcal{B}$.
(4) Déterminer une base de $\mathbf{R}^3$ dans laquelle la matrice de f soit diagonale et caractériser f.

Exercice IV

Soit (e_1, e_2, e_3) une base de $\mathbf{R}^3$,
(1) Montrer qu'il existe une unique $f \in L(\mathbf{R}^3)$ qui fixe e_2 et qui envoie e_1 sur f_1 et e_3 sur f_3 comme l'indique la figure ci-contre.
(2) Pourquoi f est-elle bijective ?
(3) On note $e_1' = \frac{1}{2}(e_1 - e_3)$ Placer ce vecteur sur le schéma puis calculer son image.
(4) Montrer que l'ensemble des vecteurs fixes de f est un plan vectoriel noté $\mathcal{P}$. Préciser sa base. Que peut-on en déduire sur les valeurs propres de f ?
(5) Déterminer l'image de $e_3' = \frac{1}{2}(e_1 + e_3)$. En déduire que $f^2 = \mathrm{id}$ (où $f^2 = f \circ f$).
(6) Montrer que f est diagonalisable et donner dans une base qu'on choisira la matrice A associée à f.



Exercice V

Montrer que l'application f de $\mathbf{R}^2$ dans lui-même qui à $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ associe $(2x - 2y, x - y)$ est une projection. Faire une figure et préciser ses éléments caractéristiques (sur quel espace projette-t-on, parallèlement à quoi ?).

Exercice VI

Soit $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'endomorphisme défini par

$$f(x, y, z) = (7x - 4y - 4z, 6x - 3y - 4z, 6x - 4y - 3z).$$

On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbf{R}^3$.
(1) On pose $P = X^2 - 1$. Calculer $P(f)(e_i)$ pour tout $1 \leq i \leq 3$. En déduire que $f \circ f = \mathrm{id}_{\mathbf{R}^3}$.
(2) En déduire que les valeurs propres de f sont dans $\{1, -1\}$.
(3) Soit $A = M_{\mathcal{B}}(f)$. Calculer $P(A)$ et retrouver le résultat de la question (1).

Exercice VII

Parmi les matrices suivantes, lesquelles sont semblables ? (Préciser dans quel ensemble.)

$$A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&1\\0&0&2\end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&2\end{pmatrix},$$

$$E=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix},F=\begin{pmatrix}1&0&i\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix},\quad G=\begin{pmatrix}1&0&i\\0&0&1\\0&2&0\end{pmatrix},\quad H=\begin{pmatrix}1&0&i\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix},$$

$$I=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix},\quad J=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}.$$

Exercice VIII

Décrire une méthode qui permettrait de décider si les matrices

$$A=\begin{pmatrix}-2&-3&-4\\-1&0&0\\2&2&3\end{pmatrix}\text{ et }B=\begin{pmatrix}-9&72&52\\1&-5&-4\\-3&20&15\end{pmatrix}$$

sont semblables dans $M_3(\mathbf{R})$. La mettre en œuvre dans cet exemple.

Exercice IX

Soit $A\in M_4(\mathbf{R})$ définie par $A=\begin{pmatrix}-1&1&1&0\\0&-1&0&1\\-1&2&1&-1\\0&-1&0&1\end{pmatrix}$.

(1) Calculer A^2.

(2) Déterminer la forme réduite de Jordan J de A et une matrice inversible P telle que $A=PJP^{-1}$.

Exercice X

Soit $f\in L(\mathbf{R}^5)$ nilpotent tel que $\dim\ker f=2$ et $\dim\ker f^2=4$.

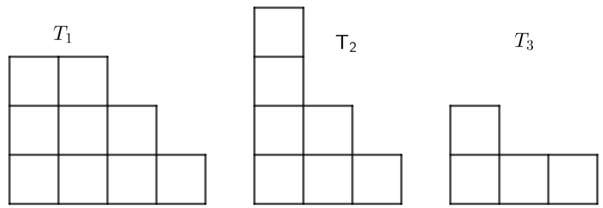
(1) Démontrer que l'indice de nilpotence de f vaut 3.

(2) Dessiner le tableau de Young associé à f

(3) En déduire la forme de Jordan associée à f.

Exercice XI

On considère $f\in L(\mathbf{R}^n)$ un endomorphisme nilpotent associé à chacun des tableaux de Young suivants.



Donner dans chaque cas :

(1) La valeur de n et l'indice de nilpotence de f.

(2) La matrice de Jordan associée à f.

(3) Le rang de f et la dimension de $\operatorname{im} f\cap\ker f$.

Exercice XII

Soit $A\in M_n(\mathbf{R})$ définie par $A=\begin{pmatrix}1&\cdots&1\\\vdots&\ddots&\vdots\\1&\cdots&1\end{pmatrix}$.

(1) Déterminer le rang de cette matrice.

(2) En déduire l'ensemble de ses valeurs propres (son spectre).

(3) Montrer que A est diagonalisable.

(4) Montrer que $A^2-tr(A)A=0$ sans calculer A^2.

Exercice XIII

Pour quelles valeurs de θ les endomorphismes canoniquement associés aux matrices

$$A_\theta=\begin{pmatrix}\cos(\theta)&-\sin(\theta)\\\sin(\theta)&\cos(\theta)\end{pmatrix}\text{ et }B_\theta=\begin{pmatrix}\cos(\theta)&-\sin(\theta)&0\\\sin(\theta)&\cos(\theta)&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

admettent-ils des sous-espaces stables ? Commenter.

Approfondissement

Exercice XIV

Soit $f \in L(E)$ et E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension $n \geq 2$.
(1) Montrer que f admet toujours des plans stables.
(2) Montrer que si n est impair, alors f admet au moins une direction stable.
(3) Si E un $\mathbf{C}$-espace vectoriel, que peut-on dire de plus ?

Exercice XV

Soit $n \in \mathbf{N}^\star$, et f l'endomorphisme de $\mathbf{R}^n$ associé à la matrice

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \\ & & 0 & & \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & & & 0 \end{pmatrix}.$$

(1) Calculer J^k pour $k \in \mathbf{N}^\star$.
(2) ($\star$) Déterminer tous les sous-espaces vectoriels stables par f.

Exercice XVI

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.
(1) Vérifier que $P = (X-1)(X-3)$ est un polynôme annulateur pour A (c'est à dire $P(A) = 0$).
(2) Soit $R_n = a_n X + b_n$ le reste de la division euclidienne de X^n par P. Déterminer a_n et b_n.
(3) En déduire une expression de A^n.

Exercice XVII

(1) Effectuer la division euclidienne de $P = X^4 + 2X^3 - X + 6$ par $Q = X^3 - 6X^2 + X + 4$ dans $\mathbf{R}[X]$.
(2) Effectuer la division euclidienne de $P = iX^3 - X^2 + (1-i)$ par $Q = (1+i)X^2 - iX + 3$ dans $\mathbf{C}[X]$.
(3) ($\star$) Trouver deux polynômes U et V de $\mathbf{R}[X]$ tels que $AU + BV = 1$, où $A = X^7 - X - 1$ et $B = X^5 - 1$.

Exercice XVIII ($\star$)

On considère l'espace vectoriel $\mathcal{F}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ des fonctions de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ et soit $T : \mathcal{F}(\mathbf{R}, \mathbf{R}) \to \mathcal{F}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ l'application définie par : si $f \in \mathcal{F}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$, alors $T(f) \in \mathcal{F}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ est la fonction définie par $\forall x \in \mathbf{R}$, $T(f)(x) = f(-x)$. Montrer que T est une symétrie de $\mathcal{F}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ et donner ses éléments caractéristiques.

Propriétés générales

Exercice XIX

Soit f un endomorphisme de E. Montrer que les sous-espaces propres de f associés à des valeurs propres distinctes sont en somme directe.

Exercice XX

Montrer que λ est valeur propre de f si et seulement si λ est racine du polynôme caractéristique de f.

Exercice XXI

Existe-t-il des endomorphismes nilpotents vérifiant $\operatorname{im} f \bigoplus \ker f = E$?

Exercice XXII

Soit E un espace vectoriel de dimension n. Quelle est la dimension de $L(E)$? Montrer que pour tout endomorphisme f de E il existe un polynôme P tel que tel que $P(f) = 0$ (sans le théorème de Cayley-Hamilton). Montrer que son degré est toujours inférieur à n^2. (Obtient-on un résultat plus fin en utilisant le théorème de Cayley-Hamilton ?)

Exercice XXIII

Soit A, B des matrices de $M_n(\mathbf{R})$. Montrer qu'elles sont semblables sur $\mathbf{R}$ si et seulement si elles sont semblables sur $\mathbf{C}$.

Exercice XXIV

Soient p et q deux projections équivalentes. Sont-elles nécessairement semblables ?

Exercice XXV

Montrer qu'un endomorphisme est une homothétie si et seulement si sa matrice dans une base est de la forme λI_n.

Exercice XXVI

Montrer qu'un endomorphisme linéaire du plan qui préserve 3 directions distinctes est une homothétie.

Exercice XXVII

Donner un exemple de deux matrices A et B telles que $AB = 0$ mais BA est non nulle. Que pouvez-vous dire des noyaux et images des endomorphismes associés ?

Pour réfléchir un peu plus...

Exercice XXVIII

Soient $f, g \in L(E)$ deux endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie. Montrer que si f et g commutent et s'ils sont tous deux diagonalisables, alors ils sont codiagonalisables (c'est-à-dire qu'il existe une base dans laquelle leurs matrices sont toutes deux diagonales).

Exercice XXIX

Montrer que si un endomorphisme f est diagonalisable, alors f^k est aussi diagonalisable. Que pensez-vous de la réciproque ?

Exercice XXX ($\star$)

Montrer que l'ensemble $H(E)$ des homothéties non nulles est un sous-groupe commutatif de $\mathrm{GL}(E)$ pour la composition. Montrer qu'il est le centre de $\mathrm{GL}(E)$, c'est à dire l'ensemble des endomorphismes qui commutent avec toutes les éléments de $\mathrm{GL}(E)$.

Exercice XXXI ($\star\star$)

Soit $f \in L(E)$ un endomorphisme d'un $\mathbf{R}$-espace vectoriel E de dimension finie tel que $f^2 = -\mathrm{id}$. Montrer qu'il existe une base dans laquelle la matrice de f s'écrit par blocs

$$\begin{pmatrix} R & 0 & \dots & 0 \\ 0 & R & & \\ & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & R \end{pmatrix} \text{ avec } R = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{R}).$$

(*Indication : on pourra d'abord montrer que la dimension de E est paire*).

Exercice XXXII ($\star\star$)

Soit $P \in \mathbf{R}[X]$ un polynôme unitaire de la forme $P(X) = X^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i X^i$. On appelle matrice compagnon associée à P la matrice

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

(1) Montrer que l'application linéaire associée à C dans la base canonique est déterminée par $f(e_i) = e_{i+1}$ pour $i < n$ et $f(e_n) = -\sum_{i=0}^{n-1} a_i e_{i+1}$.
(2) Montrer que P est le polynôme caractéristique de f.
(3) Déterminer le polynôme minimal associé à f. En déduire que f est diagonalisable si et seulement si P n'a que des racines simples.
(4) Soit λ une racine de P. Montrer que $|\lambda| \leq R$ où $R = \max\{|a_0|, |a_1| + \dots + |a_{n-1}| + 1\}$ (*indication : on pourra considérer un vecteur propre associé à λ*).

Exercice XXXIII

Soit$f \in L(E)$ un endomorphisme d'un $\mathbf{R}$-espace vectoriel E de dimension finie dont le polynôme minimal est $\mu_f(X) = \prod_{i=1}^{s}(X - \lambda_i)^{m_i}$. Étant donné un polynôme $P \in \mathbf{R}[X]$, on cherche à montrer que l'endomorphisme $P(f)$ est diagonalisable si et seulement si

$$\forall i \in \{1, \dots s\}, \forall k \in \{1, \dots m_i - 1\},\ P^{(k)}(\lambda_i) = 0.$$

(1) Montrer cette équivalence pour un endomorphisme f nilpotent d'indice m (*indication : on pourra d'abord montrer que la famille $f, f^2, \dots, f^{m-1}$ est libre*).
(2) En déduire le résultat dans le cas où $f - \lambda\mathrm{id}$ est nilpotent.
(3) Conclure dans le cas général (*indication : on pourra utiliser le théorème des noyaux*).