Défis 2 : Suites

Tous les programmes sont à rédiger en Python ou Sage, et à écrire sous forme de fonctions, dans un même fichier. Vous êtes encouragés à utiliser un notebook (Jupyter).

Ces problèmes admettent plusieurs solutions, plus ou moins astucieuses. Les applications proposées servent entre autres à vérifier que votre algorithme n'est pas trop grossier : si vous avez implémenté un algorithme raisonnable, les réponses doivent être presque instantanées.

N'hésitez pas à vous renseigner pour résoudre des problèmes !

Les exercices marqués d'une étoile sont pour ceux qui veulent aller plus loin.

Exercice 1. Soit $\lambda > e$. L'équation

$$\lambda x = e^x$$

admet deux solutions réelles : une dans l'intervalle $(0, 1)$, et une dans l'intervalle $(1, +\infty)$. Appelons-les respectivement $x_1(\lambda)$ et $x_2(\lambda)$.

Écrivez une fonction qui prend en argument un réel $\lambda > 1$ et un réel $\varepsilon > 0$, et ressort une valeur approchée de $x_1(\lambda)$ à ε près, par une méthode de dichotomie.

Application : Donnez une valeur approchée de $x_1(5)$ à 10^{-12} près. Combien d'itérations a-t-il fallu ? Pouvait-on déviner approximativement ce nombre d'itérations ?

Exercice 2. On reprend la question précédente. Au lieu d'un algorithme par dichotomie, utilisez l'algorithme de Newton, que vous arrêtez quand deux termes successifs diffèrent d'au plus ε.

Application : Combien d'itérations faut-il pour donner une valeur approchée de $x_1(5)$ à 10^{-12} près ?

Exercice 3. Comment adapter ces algorithmes pour calculer $x_2(\lambda)$ an lieu de $x_1(\lambda)$?

Exercice 4. ** Félicette veut calculer l'intégrale

$$\int_0^2 \sin(x^2)\, dx.$$

Elle a écrit pour cela un programme en Python :

```
def Felicette_integrale (N) :
    return 2 * sum([ sin((2.0*k/N)**2) for k in range(N)]) / N
```

Elle n'est pas satisfaite du résultat : en effet, pour certaines constantes a et b,

$$\text{Felicette\_integrale}(N) = \int_0^2 \sin(x^2)\, dx + \frac{a}{N} + \frac{b}{N^2} + O(N^{-3}),$$

et il lui faut donc prendre $N \simeq 10^6$ pour avoir une approximation à l'ordre 10^{-6}. Elle voudrait une approximation à l'ordre 10^{-12}, ce qui lui prendrait trop de temps.

Sans la modifier, réutilisez la fonction Felicette_integrale et un procédé d'**accélération de convergence**[1] pour obtenir une approximation de cette intégrale à l'ordre 10^{-12}.

1. Par exemple, la méthode de Romberg-Richardson.