# Développement eulérien de la fonction cotangente

Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Définissons la fonction $f$ telle que $f(x) = \cos(\alpha x)$ pour $x \in (-\pi, \pi]$ et $f$ soit $2\pi$-périodique.

Comme $\cos(\alpha\pi) = \cos(\alpha(-\pi))$, la fonction $f$ est continue et $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Comme elle est réelle et paire, nous allons utiliser les coefficients de Fourier trigonométriques $(a_n)_{n\geq 0}$ et $(b_n)_{n\geq 0}$. Plus précisément, $b_n(f) = 0$ pour tout $n \geq 0$, et pour tout $n \geq 1$,

$$\begin{aligned}
a_n(f) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(\alpha t)\cos(nt)\ \mathrm{d}t \\
&= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(\alpha t)\cos(nt)\ \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left[\cos((\alpha+n)t) + ((\alpha+n)t)\right]\ \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\pi} \left[\frac{\sin((\alpha+n)t)}{\alpha+n} + \frac{\sin((\alpha-n)t)}{\alpha-n}\right]_0^{\pi} \\
&= \frac{1}{\pi} \left[\frac{\sin((\alpha+n)\pi)}{\alpha+n} + \frac{\sin((\alpha-n)\pi)}{\alpha-n}\right] \\
&= \frac{(-1)^n}{\pi} \left[\frac{\sin(\alpha\pi)}{\alpha+n} + \frac{\sin(\alpha\pi)}{\alpha-n}\right] \\
&= \frac{(-1)^n}{\pi} \frac{2\alpha\sin(\alpha\pi)}{\alpha^2-n^2}.
\end{aligned}$$

On a utilisé en particulier la formule de linéarisation $\cos(a)\cos(b) = \frac{\cos(a+b)+\cos(a-b)}{2}$. Le calcul de $a_0(f)$ est similaire, et mène à

$$a_0(f) = \frac{\sin(\alpha\pi)}{\alpha\pi}.$$

La fonction $f$ étant continue et $\mathcal{C}^1$ par morceaux, la série de Fourier de $f$ converge normalement vers $f$. Par conséquent, pour tout $x \in [-\pi, \pi]$,

$$\cos(\alpha x) = f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(f)\cos(nx) = \frac{\sin(\alpha\pi)}{\alpha\pi} + \frac{2\alpha\sin(\alpha\pi)}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n\cos(nx)}{\alpha^2-n^2}.$$

En particulier, pour $x = \pi$,

$$\cos(\pi\alpha) = \frac{\sin(\alpha\pi)}{\alpha\pi} + \frac{2\alpha\sin(\alpha\pi)}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n\cos(n\pi)}{\alpha^2-n^2} = \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi\alpha} + \frac{2\alpha\sin(\pi\alpha)}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\alpha^2-n^2}.$$

Comme $\alpha$ n'est pas entier, $\sin(\pi\alpha) \neq 0$, et donc :

$$\mathrm{cotan}(\pi\alpha) = \frac{\cos(\pi\alpha)}{\sin(\pi\alpha)} = \frac{1}{\pi\alpha} + \frac{2\alpha}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\alpha^2-n^2}. \tag{1}$$

Finalement, en posant $x = \pi\alpha \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$,

$$\mathrm{cotan}(x) = \frac{1}{x} + 2x \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{x^2 - \pi^2 n^2}$$
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\pi^2 n^2 - x^2} = \frac{1}{2x} \left( \frac{1}{x} - \mathrm{cotan}(x) \right).$$

Afin de déterminer la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$, on voudrait prendre $x = 0$ dans l'équation précédente. On peut d'ailleur vérifier, par exemple à l'aide d'un développement limité, que le membre de droite est prolongeable par continuité en 0. Cependant, cette équation n'est a priori valable que dans $\mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$. Soit $R \in (0, \pi)$. La série de fonctions $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\pi^2 n^2 - x^2}$ converge normalement sur $[-R, R]$ ; en effet, pour tout $x \in [-R, R]$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left| \frac{1}{\pi^2 n^2 - x^2} \right| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\pi^2 n^2 - R^2} < +\infty.$$

Par conséquent, la fonction $x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\pi^2 n^2 - x^2}$ est continue sur $[-R, R]$, et en particulier est continue en 0. Il reste à prendre la limite :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\pi^2 n^2} = \lim_{x \to 0^+} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\pi^2 n^2 - x^2} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{2x} \left( \frac{1}{x} - \mathrm{cotan}(x) \right).$$

Un développement limité suffit à conclure ; en 0 :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2x} \left( \frac{1}{x} - \mathrm{cotan}(x) \right) &= \frac{1}{2x^2} \left( 1 - \frac{x \left( 1 - \frac{x^2}{2} + O(x^4) \right)}{x - \frac{x^3}{6} + O(x^5)} \right) \\
&= \frac{1}{2x^2} \left( 1 - \left( 1 - \frac{x^2}{2} + O(x^4) \right) \left( 1 + \frac{x^2}{6} + O(x^4) \right) \right) \\
&= \frac{1}{2x^2} \left( \frac{x^2}{3} + O(x^4) \right) \\
&= \frac{1}{6} + O(x^2).
\end{aligned}$$

En particulier, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\pi^2 n^2} = \frac{1}{6}$, ou encore $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

**Références**

Pour ce développement, ainsi qu'un continuation permettant de retrouver le produit eulérien

$$\frac{\sin(\pi x)}{\pi x} = \prod_{n=1}^{+\infty} \left( 1 - \frac{x^2}{n^2} \right),$$

obtenu en intégrant l'Équation (1), nous renvoyons le lecteur au texte *Oraux X-Ens, Analyse 2, p.289*.