Fonctions d'une variable réelle et dérivées : Exercices

Fonctions convexes

Exercice 1. La ligne droite est le plus court chemin [Rouvière, ex. 41 p. 117]

1. Soient I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$. Montrez que, si f est convexe, alors la fonction
$$g \ : \ y \mapsto \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$
est croissante sur $I \setminus \{x\}$. Déduisez-en que si f est convexe et dérivable, alors $f(y) - f(x) \geq f'(x)(y - x)$ pour tous x, $y \in I$. Interprétez géométriquement ce résultat.
2. Soient a, b, α, β des réels tels que $a < b$. On note F l'ensemble des fonctions $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telles que $f(a) = \alpha$ et $f(b) = \beta$. En utilisant la convexité de la fonction $g : u \mapsto \sqrt{1 + u^2}$, montrez que le minimum
$$\min_{f \in F} \int_a^b \sqrt{1 + f'(u)^2} \, \mathrm{d}u$$
est atteint par une unique fonction affine. Interprétez géométriquement ce résultat.
3. Soient I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable. Montrez que, si f'' est positive, alors f est convexe. On pourra étudier la fonction $g : t \mapsto (1 - t)f(b) + tf(a) - f((1 - t)b + ta))$ définie sur $[0, 1]$.

Exercice 2. Inégalités de Hölder-Minkowski [Moi, Exercice 5 p. 135]

1. Démontrez l'**inégalité de Young** : pour tous réels a, b de réels positifs, pour tous p, $q > 1$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$,
$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}. \tag{1}$$
2. Déduisez de l'inégalité de Young l'**inégalité de Hölder** : pour tous n-uplets de nombres complexes $(a_k)_{1 \leq k \leq n}$ et $(b_k)_{1 \leq k \leq n}$,
$$\left| \sum_{k=1}^n a_k b_k \right| \leq \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{k=1}^n |b_k|^q \right)^{\frac{1}{q}}. \tag{2}$$
3. Déduisez de ce qui précède l'**inégalité de Minkowski** : pour tous n-uplets de nombres complexes $(a_k)_{1 \leq k \leq n}$ et $(b_k)_{1 \leq k \leq n}$, pour tout $p > 1$,
$$\left(\sum_{k=1}^n |a_k + b_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^n |b_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \tag{3}$$
4. Pour tout $a := (a_k)_{1 \leq k \leq n} \in \mathbb{C}^n$ et $p > 1$, on note $|a|_p := (\sum_{k=1}^n |a_k|^p)^{\frac{1}{p}}$. Montrez que $| \cdot |_p$ est une norme sur $\mathbb{C}^n$.
5. Que valent $|a|_1 := \lim_{p \to 1} |a|_p$ et $|a|_\infty := \lim_{p \to +\infty} |a|_p$? Ces deux fonctionnelles sont-elles des normes ?

Exercice 3. Suites de fonctions convexes [Moisan, Suites et série de fonctions, ex. C4 p. 20 ; FGN, Analyse, ex. 33, p. 161]

1. Soit I un intervalle ouvert et $(f_n)_{n\in N}$ une suite de fonctions convexes de I dans $\mathbb{R}$ qui converge simplement vers f sur I. Montrez que $(f_n)_{n\in N}$ converge uniformément vers f sur sur tout segment $[a,b]\subset I$. Déduisez-en que f est convexe.
2. Application : Montrez que la fonction exp, définie sur $\mathbb{R}$ comme limite simple de $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$, est de classe $\mathcal{C}^1$, et que $\exp' = \exp$.

Exercice 4. Asymptotes des fonctions convexes [Moisan, ex. 3 p. 142]
Soit f une application deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, positive ainsi que ses deux dérivées.

1. Montrez que les limites $\lim_{t\to+\infty} f(t)$ et $\lim_{t\to+\infty} \frac{f(t)}{t}$ existent et sont positives (éventuellement infinies). Dans quels cas la première est-elle finie ?
2. Montrez que si $\lim_{t\to+\infty} \frac{f(t)}{t} =: \alpha \in \mathbb{R}$, alors $f(t)-\alpha t$ a une limite dans $\mathbb{R}\cup\{-\infty\}$ quant t tend vers $+\infty$.
3. Que peut on dire en $-\infty$?
4. (Optionnel) Reprennez cette exercice en supposant seulement que f est positive, croissante et convexe sur $\mathbb{R}$.

Dérivées successives

Exercice 5. Fonctions lisses à support compact [Gou, Exercice 3 p. 79]

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par
$$f(x) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{si} \quad x>0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$
Montrez que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
2. Construisez une fonction φ, de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $[0,1]$, et telle que $\varphi(x)=1$ si $|x|\leq 1$, $\varphi(x)=0$ si $|x|\geq 2$.

Inégalités et formules de Taylor. Applications.

Exercice 6. [Gou, Exercice 1 p. 77]
Montrez les inégalités suivantes :

1. $$x-\frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3} \quad \forall x\in\mathbb{R}_+^* \ ;$$
2. $$x-\frac{x^3}{6} \leq \sin(x) \leq x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120} \quad \forall x\in\mathbb{R}_+ \ ;$$
3. $$1-\frac{x^2}{2} \leq \cos(x) \leq 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24} \quad \forall x\in\mathbb{R}.$$

Exercice 7. Inégalités de Laudau
Soit $c\in\mathbb{R}$ et f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[c,+\infty)$.

1. À l'aide d'une des formules de Taylor appliquée entre $x \geq c$ et $x+h$, montrez que [1], pour tout réel $h \geq 0$,

$$h \left\|f'\right\|_\infty \leq 2 \left\|f\right\|_\infty + \frac{h^2}{2} \left\|f''\right\|_\infty .$$

2. En optimisant [2] le paramètre h, montrez l'**inégalité de Landau** :

$$\left\|f'\right\|_\infty \leq 2\sqrt{\left\|f\right\|_\infty \left\|f''\right\|_\infty}.$$

3. Trouvez une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et $\mathcal{C}^2$ par morceaux qui réalise l'égalité dans l'inégalité ci-dessus.
4. Supposons maintenant que f est définie sur $\mathbb{R}$. En adaptant la démonstration précédente – on pourra utiliser 3 points $x-h$, x et $x+h$ – montrez que

$$h \left\|f'\right\|_\infty \leq 2 \left\|f\right\|_\infty + h^2 \left\|f''\right\|_\infty ,$$
$$\left\|f'\right\|_\infty \leq \sqrt{2}\sqrt{\left\|f\right\|_\infty \left\|f''\right\|_\infty},$$

et trouvez une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ par morceaux qui réalise l'égalité.

Exercice 8. Inégalités de Laudau-Kolmogorov [Gou, ex. 8 p. 84 ; Moi, Exercice 6 p. 139 ; FGN·Ana1, Exercice 4.43, Ska, Exercice 7.33]
Le but de cet exercice est de montrer que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^n$ est si f et $f^{(n)}$ sont bornées, alors $f^{(k)}$ est bornée pour tout $1 \leq k \leq n-1$.
Soit H_{n-1} la matrice de taille $(n-1) \times (n-1)$ de coefficients $(H_n)_{ij} = i^j$. On pose, pour tout x réel,

$$\begin{pmatrix} F_1(x) \\ \vdots \\ F_{n-1}(x) \end{pmatrix} := H_{n-1} \begin{pmatrix} \frac{f'(x)}{1!} \\ \vdots \\ \frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!} \end{pmatrix}.$$

1. Montrez que H_{n-1} est inversible.
2. À l'aide d'une des formules de Taylor, montrez que, pour tout réel x,

$$|F_k(x)| \leq 2 \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)| + \frac{(n-1)^{(n-1)}}{(n-1)!} \sup_{x\in\mathbb{R}} |f^{(n)}(x)|.$$

3. Concluez.

Interpolation

Exercice 9.
Soient $c < a < b < d$ quatre réels et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ (respectivement, de classe $\mathcal{C}^n$). Existe-t-il une fonction $g : [c,d] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ (respectivement, de classe $\mathcal{C}^n$) qui prolonge f ?

Exercice 10. Polynômes d'interpolation de Lagrange [Caby Auliac, p. 275]
Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $(q+1)$ réels distincts x_0, x_1, …, x_q. Le **polynôme d'interpolation** de f en ces points est, par définition, le polynôme de plus bas degré qui coïncide avec f en ces points.

---

1. On observera que l'inégalité qui quit est dimensionnellement cohérente.
2. Là encore, on observera que le bon choix de paramètre h a la bonne dimension, de même que l'inégalité finale.

1. Construction.
   (a) Quelle est la dimension de l'espace vectoriel des polynômes réels de degré inférieur ou égal à q ?
   (b) On définit les polynômes W_0, …, W_q par

$$W_i := \prod_{\substack{0 \leq j \leq q \\ j \leq i}} \frac{X - x_j}{x_i - x_j}.$$

   Calculez $W_i(x_j)$ pour $0 \leq i, j \leq q$. Montrez que la famille $(W_i)_{0 \leq i \leq q}$ est libre.
   (c) Déduisez-en qu'il existe un unique polynôme P de degré inférieur ou égal à q prenant en x_i la valeur $f(x_i)$, pour tout $0 \leq i \leq q$. Exprimez P en fonction des polynômes W_i.

2(a) On suppose que la fonction f est $(q+1)$ fois dérivable sur un intervalle I contenant les réels $(x_i)_{0 \leq i \leq q}$. Étant donné un point $x \in I$, montrez qu'il existe $\xi \in I$ tel que

$$f(x) - P(x) = \frac{1}{(q+1)!} f^{(q+1)}(\xi) \prod_{i=0}^{q} (x - x_i).$$

   Dans le cas où x n'est pas un des x_i, on appliquera le théorème de Rolle de manière répétée à une fonction bien choisie.
   (b) Donnez un exemple de fonction f non polynômiale, définie sur un segment, telle que toute suite de polynômes d'interpolation obtenue en augmentant le nombre $(q+1)$ de points d'interpolation converge uniformément vers f.

Références

[FGN·Ana1] : *Oraux X-ENS. Algèbre 1.* S. Francinou, H. Gianella, S. Nicolas.
[Gou] : *Les maths en tête, Analyse.* X. Gourdon.
[Moi] : *Mathématiques supérieures, Analyse.* J. Moisan, F. Chanet, F. Delmas, N. Tosel.
[Ska] : *Analyse.* G. Skandalis.