Intégration : programme de l'agrégation interne

Intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment

Définition de l'intégrale de Riemann, linéarité, positivité, inégalité de la moyenne, relation de Chasles.
Inégalité de Cauchy-Schwarz.
Primitive d'une fonction continue sur un intervalle. Intégration par parties, changement de variable, calculs de primitives et d'intégrales.
Convergences en moyenne et en moyenne quadratique pour les suites de fonctions. Comparaison avec la convergence uniforme.

Intégrales sur un segment d'une fonction dépendant d'un paramètre

Théorèmes de continuité et de dérivabilité sous le signe somme.

Intégration sur un intervalle quelconque

Les fonctions considérées dans ce paragraphe sont supposées continues par morceaux sur l'intervalle I de définition, c'est-à-dire continues par morceaux sur tout segment contenu dans I.
Intégrale d'une fonction positive (comme borne supérieure, éventuellement infinie, des intégrales sur les segments inclus dans I). Emploi des relations de comparaison.
Une fonction définie sur I à valeurs complexes est dite intégrable si l'intégrale de son module est finie.
Les trois théorèmes suivants sont admis :

Théorème 0.1 (Théorème de convergence monotone)**.**
Soit (f_n) une suite de fonctions intégrables et f une fonction continue par morceaux sur I. Supposons que :
- ▷ *(f_n) est croissante : pour tout $x \in I$, la suite $(f_n(x))$ est croissante.*
- ▷ *(f_n) converge simplement vers f : pour tout $x \in I$, on a $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$.*

Alors f est intégrable sur I si et seulement si la suite $\left(\int_I f_n\right)$ est majorée ; en ce cas,

$$\int_I f(t)dt = \lim_{n\to+\infty} \int_I f_n(t)dt.$$

Théorème 0.2 (Théorème de convergence dominée)**.**
Soit (f_n) une suite de fonctions à valeurs complexes et f une fonction continue par morceaux sur I. Supposons que :
- ▷ *$(|f_n|)$ est majorée par une fonction intégrable : il existe une fonction g intégrable sur I telle que $|f_n(x)| \leq g(x)$ pour tous $x \in I$ et $n \geq 0$.*
- ▷ *(f_n) converge simplement vers f : pour tout $x \in I$, on a $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$.*

Alors f est intégrable sur I et

$$\int_I f(t)dt = \lim_{n\to+\infty} \int_I f_n(t)dt.$$

Theorem 0.3 (Théorème d'intégration terme à terme)**.**
Soit (u_n) une suite de fonctions à valeurs complexes et intégrables sur I et S une fonction continue par morceaux sur I. Supposons que :
- ▷ *la série $\sum_n \int_I |u_n|$ converge ;*
- ▷ *$(\sum_n u_n)$ converge simplement vers S : pour tout $x \in I$, on a $\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} u_n(x) = S(x)$.*

Alors f est intégrable sur I et

$$\int_I S(t)dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I u_n(t)dt.$$

Intégrales impropres

Intégrales convergentes, divergentes ; critère de Cauchy.
Convergence absolue, lien avec l'intégrabilité. Emploi des relations de comparaison, de l'intégration par parties pour l'étude de la convergence. Intégration de relations de prépondérance et d'équivalence.
Pour une fonction f définie sur $[a, +\infty)$ et à valeurs positives, comparaison entre la convergence de la série de terme général $f(n)$ $(n > a)$ et l'intégrabilité de f sur $[a, +\infty)$ (méthode des rectangles).
Si f est décroissante et positive sur $[a, +\infty)$, alors la série de terme général $f(n) - \int_{[n,n+1]} f(t)dt$ converge.

Intégrales sur un intervalle quelconque d'une fonction dépendant d'un paramètre

Theorem 0.4 (Théorème de continuité)**.**
Soient X un ouvert de $\mathbb{R}^n$, I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur $X \times I$ et à valeurs complexes. Supposons que :

- ▷ *continuité en le paramètre : pour tout $t \in I$, la fonction partielle $x \mapsto f(x, t)$ est continue sur X.*
- ▷ *pour tout $x \in X$, la fonction partielle $t \mapsto f(x, t)$ est continue par morceaux sur I.*
- ▷ *domination : il existe une fonction g intégrable sur I telle que $|f(x, t)| \leq g(t)$ pour tous $x \in X$ et $t \in I$.*

Soit

$$F : \begin{cases} X & \rightarrow \quad \mathbb{C} \\ x & \mapsto \quad \int_I f(x,t)dt \end{cases}.$$

Alors F est continue sur X.

Theorem 0.5 (Théorème de dérivation)**.**
Soient X et I deux intervalles ouverts de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur $X \times I$ et à valeurs complexes. Supposons que :

- ▷ *pour tout x dans X, la fonction partielle $t \mapsto f(x, t)$ est intégrable sur I.*
- ▷ *pour tout x dans X et $t \in I$, la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ existe.*
- ▷ *continuité en le paramètre : pour tout $t \in I$, la fonction $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ est continue.*
- ▷ *domination de la dérivée : il existe une fonction g intégrable sur I telle que $|\frac{\partial f}{\partial x}(x, t)| \leq g(t)$ pour tous $x \in X$ et $t \in I$.*

Soit

$$F : \begin{cases} X & \rightarrow \quad \mathbb{C} \\ x & \mapsto \quad \int_I f(x,t)dt \end{cases}.$$

Alors F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur X, et pour tout $x \in X$,

$$F'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)dt.$$

Application des théorèmes précédents à la fonction Gamma d'Euler, à la transformée de Fourier, à la transformée de Laplace.