Fonctions continues d'une variable réelle : Compléments 2. Continuité uniforme. Notes de cours.

Table des matières

Ces notes abordent la notion de continuité uniforme (et ses liens étroits avec la compacité). Dans cette partie, (X, d_X) et (Y, d_Y) sont deux espaces métriques.

1 Définition

La continuité uniforme, définie dans des espaces métriques [1] est une propriété plus restrictive que la continuité.

Définition 1.1 (Continuité uniforme)**.**
Une fonction $f : X \to Y$ est dite ***uniformément continue*** *si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x_1, x_2 \in X,\ d_X(x_1, x_2) \leq \delta \Rightarrow d_Y(f(x_1^{,} f(x_2)) \leq \varepsilon.$$

Cette définition ressemble à celle de la continuité ; elle n'en diffère que par une interversion de quantificateurs. Dans la définition métrique de la continuité, le paramètre δ peut dépendre de x_1 ; ce n'est pas le cas pour la continuité uniforme, pour laquelle le paramètre δ est uniforme en x_1.

Exercice 1.2.
Soit $f : X \to Y$ une fonction uniformément continue et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans X. Montrez que $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans Y.

2 Module de continuité

Formellement, dans la définition de la continuité uniforme, le paramètre δ ne dépend que de ε : on peut écrire $\delta = \delta(\varepsilon)$. La proposition suivante formalise cette observation. Nous renvoyons aussi la lectrice à [Ska, Exercice 7.4].

Proposition 2.1.
Soit $f : X \to Y$. Alors f est uniformément continue. si et seulement s'il existe $\delta_0 > 0$ et une fonction $\omega_f : [0, \delta_0) \to [0, +\infty)$ continue en 0, croissante, telle que $\omega_f(0) = 0$ et, pour tous x_1, $x_2 \in X$ à distance au plus δ_0,

$$d_Y(f(x_1), f(x_2)) \leq \omega_f(d_X(x_1, x_2)).$$

Si de plus $X = \mathbb{R}^n$, alors ω_f est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$ (ou, autrement dit, $\delta_0 = +\infty$ convient). On appelle une telle fonction ω_f un ***module de continuité*** *de f.*

En particulier, pour des fonctions réelles d'une variable réelle uniformément continues, pour tous x, y à distance au plus δ_0,

$$|f(x) - f(y)| \leq \omega_f(|x - y|).$$

Démonstration.
La réciproque étant comparativement facile (il suffit d'utiliser la continuité de ω_f en 0), concentrons-nous sur le sens direct. Il suffit de poser

$$\omega_f(t) := \sup_{\substack{x_1, x_2 \in X \\ d(x_1, x_2) \leq t}} d_Y(f(x_1), f(x_2)).$$

Alors ω_f est croissante, et $\omega_f(0) = 0$. De plus, soit δ_0 tel que $\forall x_1, x_2 \in X,\ d_X(x_1, x_2) \leq \delta_0 \Rightarrow d_Y(f(x_1, f(x_2)) \leq 1$. Alors $\omega_f(\delta_0) \leq 1$, et en particulier ω_f est finie sur $[0, \delta_0)$. Par définition de la continuité uniforme, $\lim_0 \omega_f = 0$, ce qui donne la continuité en 0.

1. Ou, plus généralement, dans des *espaces uniformes*.

Il reste à montrer les propriétés additionnelles pour les fonctions définies sur $\mathbb{R}$. Soient $0 \leq s \leq t$ et x_1, x_2 à distance au plus t. Soit $x_3 \in [x_1, x_2]$ à distance au plus s de x_1 et au plus $t-s$ de x_2. Alors

$$d(f(x_1), f(x_2)) \leq d(f(x_1), f(x_3)) + d(f(x_2), f(x_3)) \leq \omega_f(s) + \omega_f(t-s).$$

En prenant le supremum sur x_1 et x_2, on obtient finalement $\omega_f(t) \leq \omega_f(s) + \omega_f(t-s)$. En particulier, en itérant cette inégalité,

$$\omega_f(t) \leq \lceil t/\delta_0 \rceil \omega_f(\delta_0) < +\infty,$$

donc ω_f est bien finie sur $\mathbb{R}_+$. Enfin, $\omega_f(t) \leq \omega_f(t+h) \leq \omega_f(t) + \omega_f(h) \to_{h \to 0} \omega_f(t)$, donc ω_f est bien continue à droite partout. De même, $\omega_f(t) - \omega_f(h) \leq \omega_f(t-h) \leq \omega_f(t)$, donc ω_f est bien continue à gauche partout. □

Exemple 2.2.
Une fonction f est lipschitzienne si et seulement s'il existe $L \geq 0$ tel que la fonction $t \mapsto Lt$ soit un module de continuité de f. En particulier, toute fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un segment est uniformément continue.

Une fonction f est θ-höldérienne si et seulement s'il existe $L \geq 0$ tel que la fonction $t \mapsto Lt^\theta$ soit un module de continuité de f.

Exemple 2.3.
La fonction $f : x \to x^2$ définie sur $\mathbb{R}$ est continue mais pas uniformément continue. En effet, procédons par l'absurde choisissons $\varepsilon = 1$ dans la définition de la continuité uniforme. Alors, pour tout $\delta > 0$, on a $(x+\delta)^2 - x^2 > 2\delta x$. En particulier, les points $\frac{1}{2\delta}$ et $\frac{1}{2\delta} + \delta$ sont à distance δ, mais les valeurs correspondantes de f sont à distance au moins 1.

Plus généralement, si f est une fonction uniformément continue sur $\mathbb{R}$, alors il existe a, $b \geq 0$ tels que $|f(x)| \leq a|x| + b$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ [Rom, Exercice 6.12] [Ska, Exercice 7.3].

3 Théorème de Heine

Comme mentionné, les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un segment sont uniformément continues. Le théorème de Heine affirme que, sur un segment, la continuité suffit.

Théorème 1 (Théorème de Heine)**.**
Soit X un espace (séquentiellement) compact, Y un espace métrique et $f : X \to Y$. Alors f est continue si et seulement si elle est uniformément continue.

En particulier, pour tous $a < b$, toute fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est uniformément continue.

Démonstration.
On utilise le module de continuité. Soit

$$\omega_f(t) := \sup_{\substack{x_1, x_2 \in X \\ d(x_1, x_2) \leq t}} d_Y(f(x_1), f(x_2)).$$

On sait que ω_f est croissante et $\omega_f(0) = 0$. Il suffit de montrer que $\omega_f < +\infty$ sur un voisinage de 0 et que $\lim_0 \omega_f = 0$.

Comme X est compact, f est bornée, donc $\omega_f(t) < +\infty$ pour tout t.

Soit $\ell := \lim_0 \omega_f$. On procède par l'absurde. Supposons que $\ell > 0$. Alors, pour tout $n \geq 1$, il existe x_n, $y_n \in X$ tels que $d_X(x_n, y_n) \leq 1/n$ et $d_Y(f(x_n), f(y_n)) \geq \ell/2$.

Soit $(x, y) \in X^2$ un point d'adhérence de (x_n, y_n). Alors $d_X(x, y) = \lim_{n \to +\infty} d(x_n, y_n) = 0$, donc $x = y$, et $d_y(f(x), f(y)) \geq \ell/2 > 0$, ce qui est absurde. □

Exercice 3.1.
Réécrire la preuve ci-dessus en utilisant la définition en ε-δ de la continuité uniforme.

Le théorème de Heine sur $\mathbb{R}$ admet une généralisation importante :

Proposition 3.2 ([Ska, Exercice 7.2])**.**
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application continue admettant des limites finies en $\pm\infty$. Alors f est uniformément continue.

Démonstration.
Soit $\varepsilon > 0$. Comme f admet des limites finies en $\pm\infty$, la famille $(f(x))_{x\in\mathbb{R}}$ satisfait le critère de Cauchy au voisinage de $\pm\infty$. En particulier, il existe $M \geq 0$ tel que, pour tous x, $y \geq M$, on ait $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$, et de même pour x, $y \leq -M$.

Posons $K := [-M-2, M+2]$. Alors, $f_{|K}$ étant uniformément continue par le théorème de Heine, il existe $\delta \leq 1$ tel que, pour tous x, $y \in K$ tels que $|x - y| \leq \delta$, on ait $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$.

Soient x, $y \in \mathbb{R}$ tels que $|x - y| \leq \delta$.
- ▷ Si $x \in [-M-1, M+1]$, alors $y \in K$ (car $\delta \leq 1$), donc $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$ (car $[x - y| \leq \delta$).
- ▷ Si $x \geq M + 1$, alors $y \geq M$ (car $\delta \leq 1$), donc donc $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$.
- ▷ De même $x \leq -M - 1$.

Dans tous les cas, $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$, ce qu'il fallait démontrer. □

Remarque 3.3.
En particulier, on peut trouver facilement des fonctions uniformément continues sur $\mathbb{R}$ dont la dérivée est non bornée ; par exemple, $f(x) = \frac{\cos(x^4)}{1+x^2}$.

4 Application 1 : Prolongements de fonctions continues

Soit $A \subset X$ et $f : X \to Y$. À quelle condition f peut-elle être étendue en une fonction continue de X dans Y ? Nécessairement, f doit être continue, mais cette condition est-elle suffisante ? Cela dépend de l'ensemble A en question.

Proposition 4.1 ([Ska, Exercice 7.7])**.**
Soit $A \subset \mathbb{R}$ et $f : A \to \mathbb{R}$ continue. Si A est fermé, alors il existe $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que $g_{|A} = f$.

Démonstration.
Comme A est fermé dans $\mathbb{R}$, le complémentaire de A est une union finie d'intervalles ouverts. On étend f :
- ▷ par une constante sur les éventuels intervalles non bornés (il y en a au plus 2) ;
- ▷ de façon affine sur chaque intervalle borné.

On vérifie alors que g est bien continue en tout point x :
- ▷ si $(x, x+1) \cap A$ est non vide, alors il existe un voisinage de x sur lequel on peut contrôler g directement grâce à f ;
- ▷ sinon, f est affine sur $[x, x+1)$, donc continue ;
- ▷ de même sur $(x-1, x)$.

□

Plus utile est l'extension de fonctions définies sur un ensemble dense. Cette extension utilise de façon cruciale la notion de suite de Cauchy.

Proposition 4.2.
Soit $A \subset \mathbb{R}$ et $f : A \to \mathbb{R}$ uniformément continue. Si A est dense dans $\mathbb{R}$, alors il existe une unique fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que $g_{|A} = f$.

Démonstration.
Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit $(u_n^x)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans A convergeant vers x. Alors $(u_n^x)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy et f est uniformément continue, donc $(f(u_n^x))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy. Comme $\mathbb{R}$ est complet, $(f(u_n^x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Soit $g(x)$ sa limite.

Montrons que g est uniformément continue. Soit ω_f définie sur $[0, \delta_0)$ un module de continuité de f. Soient $x \neq y \in \mathbb{R}$ tels que $|x - y| < \delta_0/3$. Soient $(u_n^x)_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_n^y)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites utilisées pour définir $g(x)$ et $g(y)$. Il existe $N \geq 0$ tel que $|u_n^x - x|$, $|u_n^y - y| < \delta_0/3$ pour tout $n \geq N$. Mais alors, pour tout $n \geq N$,

$$\begin{aligned} |g(x) - g(y)| &\leq |g(x) - f(u_n^x)| + |f(u_n^x) - f(u_n^y)| + |f(u_n^y) - g(y)| \\ &\leq |g(x) - f(u_n^x)| + \omega_f(|u_n^x - u_n^y|) + |f(u_n^y) - g(y)|\,. \end{aligned}$$

De plus, $\omega_f(|u_n^x - u_n^x|) \leq \omega_f(2|x-y|)$ pour tout n suffisamment grand, et $|g(x) - f(u_n^x)|$ et $|g(y) - f(u_n^y)|$ convergent vers 0. Par conséquent,

$$|g(x) - g(y)| \leq \omega_f(2|x - y|).$$

Donc $t \mapsto \omega_f(2t)$ est un module de continuité pour g, donc g est uniformément continue.

L'unicité provient du fait que deux fonctions continues coïncidant sur un ensemble dense sont égales.

□

Remarque 4.3.
La démonstration ci-dessus, contrairement à celle du prolongement de fonctions définies sur des fermées, utilise peut les propriétés des réels. Elle est en fait vraie pour deux espaces métriques X et Y tels que Y soit complet.

Cette version plus générale est particulièrement utile en analyse fonctionnelle : si X est un espace vectoriel normé et Y est un espace de Banach, on peut étendre de façon unique toute application linéaire bornée définie sur un ensemble dense de X à valeurs dans Y.

Remarque 4.4.
L'hypothèse d'uniforme continuité est cruciale. Par exemple, la fonction signe définie sur $\mathbb{R}^*$ est continue, mais ne s'étend pas en une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

5 Application 2 : Théorème d'Arzelà-Ascoli

Les compacts de $\mathbb{R}^n$ sont les fermés bornés. Comme évoqué précedemment, ce résultat est faux en dimension infinie : les boules fermées sont trop grosses, par exemple. Le théorème d'Arzelà-Ascoli fourni une réponse dans les espaces de fonctions continues.

Ce résultat est suffisamment technique pour qu'il soit dangereux de l'utiliser en développement. Il permet cependant d'éclairer la notion de compacité en dimension infinie.

Définition 5.1.
Une famille de fonctions $(f_i)_{i\in I}$ entre deux espaces métriques est dite ***uniformément équicontinue***[2] *si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que, pour tous x, y, si $d(x, y) \leq \delta$, alors $d(f_i(x), f_i(y)) \leq \varepsilon$ pour tout $i \in I$.*

2. Un terme moins élégant mais plus adéquat pourrait être celui de famille uniformément uniformément continue...

De façon équivalente, une famille uniformément équicontinue est une famille de fonctions uniformément continues ayant un même module de continuité. Par exemple, l'ensemble des fonctions 1-lipschitziennes sur $\mathbb{R}$ est uniformément équicontinu.

Théorème 2 (Arzelà-Ascoli [FGN·Ana3, Exercice 2.34])**.**
Une partie $K \subset \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ est compacte si et seulement si K est fermée, bornée, et uniformément équicontinue.

Démonstration.
Si K est compacte, alors K est fermée et bornée. De plus, l'application de $K \times [a,b] \to \mathbb{R}$ qui à (f,x) associe $f(x)$ est continue, donc uniformément continue par le théorème de Heine. Elle admet donc un module de continuité ω, tel que $|f(x)-g(y)| \leq \omega(\|f-g\|_\infty + |x-y|)$ pour tous f, $g \in K$ et x, $y \in [a,b]$ suffisamment proches. En particulier, en prenant $f = g$, pour tout $f \in K$ et tous x, $y \in [a,b]$ suffisamment proches, on a $|f(x)-f(y)| \leq \omega(|x-y|)$.

Soit $K \subset \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ fermée, bornée et uniformément continue ; notons ω un module de continuité. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans K. On se donne aussi une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dense dans $[a,b]$.

On va construire par récurrence, via un argument diagonal, une sous-suite convergente de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Pour tout $N \geq 1$, posons $\delta_N := \max\{|x-x_i| : \ x \in [a,b], \ 0 \leq i < N\}$. Alors deux fonctions f, $g \in K$ coïncidant sur $(x_i)_{0\leq i<n}$ sont à distance au plus $2\omega(\delta_N)$ l'une de l'autre. De plus, par densité, $\lim_{N\to+\infty} \delta_N = 0$.

On pose :

- ▷ $f_n^{(0)} = f_n$ pour tout $n \geq 0$;
- ▷ Soit $N \geq 0$. L'ensemble $\{f_n^{(N)}(x_N) : \ n \in \mathbb{N}\}$ est borné car K est borné. On peut donc extraire une sous-suite $(f_n^{(N+1)})_{n\in\mathbb{N}}$ de $(f_n^{(N)})_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $f_n^{(N+1)}(x_N)$ converge.
- ▷ En particulier, il existe n_0 tel que, pour tous n, $m \geq n_0$ suffisamment grand, on a $|f_n^{(N+1)}(x_k) - f_m^{(N+1)}(x_k)| \leq 3\omega(\delta_N)$. On ne garde que les termes de la suite $n \geq n_0$, avec $n \geq 1$.

Soit alors $g_N = f_0^{(N)} =: f_{n_N}$. La suite n_N est strictement croissante (car, à chaque étape, on n'a gardé que des indices $n \geq 1$). De plus, par construction, pour tout n, $m \geq N \geq 0$, on a $\|g_n - g_m\|_\infty \leq 3\omega(\delta_N)$. Par conséquent, la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy, donc converge vers $f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$. Or K est fermé, donc $f \in K$. □

Exemple 5.2.
L'ensemble des fonctions $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ qui sont 1-lipschitziennes et telles que $f(0) = 1$ est compact dans $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$.

6 Application 3 : Sommes de Riemann

Une autre application importante de la continuité uniforme est la convergence des sommes de Riemann. Nous admettons ici que l'intégrale d'une fonction continue sur un segment est bien définie et a les propriétés attendues (linéarité, positivité). Nous utiliserons le lemme suivant, dont la démonstration est laissée en exercice :

Lemme 6.1.
Soit I un segment, f une fonction réelle continue sur I et $c \leq d$ deux réels tels que

$$c \leq f \leq d.$$

Alors

$$c \leq \frac{1}{|I|}\int_I f(t)\,\mathrm{d}t \leq d.$$

Remarque 6.2.
Ce lemme a une généralisation importante, liée à l'inégalité de Jensen : Si C est un convexe borné d'un espace de Banach, μ une mesure de probabilité sur un espace X et $f : X \to C$, alors $\int f \, \mathrm{d}\mu \in C$. Le lemme précédent et le cas particulier de $C = [c, d]$ et μ la mesure uniforme sur I.

D'un point de vue plus élémentaire, si on se donne des points dans un convexe munis de poids positifs, leur barycentre est encore dans le convexe.

Proposition 6.3.
Soit $[a, b]$ un segment et f une fonction réelle continue sur $[a, b]$. Soit ω_f un module de continuité de f. Alors, pour tout n suffisamment grand,

$$\left|\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) - \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq (b-a)\omega_f\left(\frac{b-a}{n}\right)$$

et

$$\left|\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + \left(k+\frac{1}{2}\right)\frac{b-a}{n}\right) - \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq (b-a)\omega_f\left(\frac{b-a}{2n}\right).$$

En particulier, ces sommes de Riemann convergent vers l'intégrale de f quand n tend vers $+\infty$.

Démonstration.
Soit δ_0 tel que ω_f soit défini sur $[0, \delta_0)$. Alors $\frac{b-a}{n} < \delta_0$ pour tout n suffisamment grand, et dans ce cas, pour tout $0 \leq k < n$ et $t \in [a + k\frac{b-a}{n}, a + (k+1)\frac{b-a}{n}]$,

$$f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) - \omega_f\left(\frac{b-a}{n}\right) \leq f(t) \leq f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) + \omega_f\left(\frac{b-a}{n}\right).$$

D'après le Lemme 6.1,

$$f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) - \omega_f\left(\frac{b-a}{n}\right) \leq \int_{a+k\frac{b-a}{n}}^{a+(k+1)\frac{b-a}{n}} f(t)\,\mathrm{d}t \leq f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) + \omega_f\left(\frac{b-a}{n}\right).$$

En sommant ces inégalités puis en multipliant par $\frac{b-a}{n}$, on obtient finalement la première inégalité. La seconde s'obtient de façon similaire. □

En particulier, si f est θ-höldérienne, alors il existe $C \geq 0$ tel que

$$\left|\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) - \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq Cn^{-\theta}.$$

Dans le cas de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ ou $\mathcal{C}^2$, ces bornes d'erreurs peuvent être significativement améliorées, et mener à un développement plus riche pour l'oral d'agrégation. Cet aspect sera vu plus en détail dans le chapitre sur l'intégration.

7 Application 4 : Produit de convolution

Une autre application concerne la convergence des produits de convolution, là encore car la continuité uniforme permet de contrôler les valeurs d'une fonction évaluée en des points proches.

Proposition 7.1.
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction uniformément continue, et* ω_f *un module de continuité de* f.

Soit g *une fonction continue par morceaux sur* $\mathbb{R}$, *nulle en dehors d'un segment* $[a,b]$, *et d'intégrale* 1. *Posons, pour tous* x *réel et* $\varepsilon > 0$,

$$f * g_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-1} \int_{\mathbb{R}} f(t) g(\varepsilon^{-1}(x-t))\, \mathrm{d}t.$$

Alors $\|f * g_\varepsilon - f\|_\infty \leq \omega_f(\varepsilon \max\{|a|,|b|\})$ *pour tout* ε *suffisamment petit. En particulier,* $f * g_\varepsilon$ *converge vers* f *uniformément quand* ε *tend vers* 0.

Démonstration.
Soient x un réel et $\varepsilon > 0$. La fonction $t \mapsto g(\varepsilon^{-1}(x-t))$ est nulle si $\varepsilon^{-1}(x-t) \notin [a,b]$, donc si $t \notin [x-\varepsilon b, x-\varepsilon a]$. Par conséquent,

$$f * g_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-1} \int_{x-\varepsilon b}^{x-\varepsilon a} f(t) g(\varepsilon^{-1}(x-t))\, \mathrm{d}t.$$

Sur cet intervalle, $|f - f(x)| \leq \omega(\varepsilon \max\{|a|,|b|\})$, et $t \mapsto \varepsilon^{-1} g(\varepsilon^{-1}(x-t))$ est d'intégrale 1. En adaptant le Lemme 6.1,

$$|f * g_\varepsilon(x) - f(x)| \leq \omega_f(\varepsilon \max\{|a|,|b|\}).$$

Ceci étant vrai pour tout $x \in \mathbb{R}$, le résultat suit immédiatement. $\square$

On peut utiliser cette proposition pour montrer :

Proposition 7.2.
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction continue.*

Soit g *une fonction continue par morceaux sur* $\mathbb{R}$, *nulle en dehors d'un segment* $[a,b]$, *et d'intégrale* 1. *Posons, pour tous* x *réel et* $\varepsilon > 0$,

$$f * g_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-1} \int_{\mathbb{R}} f(t) g(\varepsilon^{-1}(x-t))\, \mathrm{d}t.$$

Alors $f * g_\varepsilon$ *converge vers* f *uniformément sur tout compact quand* ε *tend vers* 0.

Démonstration.
Il suffit de démontrer la proposition pour les compacts de la forme $[-M,M]$ avec $M > 0$. Soit $[-M,M]$ un tel segment.

Par le théorème de Heine, la restriction de f à $[-M-1, M+1]$ est uniformément continue ; notons ω_M un de ses modules de continuité. De plus, si $\varepsilon < \max\{|a|,|b|\}^{-1}$, alors $t \mapsto g(\varepsilon^{-1}(x-t))$ est nulle en-dehors de $[x-1, x+1] \subset [-M-1, M+1]$. Par conséquent, pour tout $x \in [-M,M]$,

$$f * g_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-1} \int_{-M-1}^{M+1} f(t) g(\varepsilon^{-1}(x-t))\, \mathrm{d}t.$$

Le calcul qui s'ensuit est le même que dans le cas précédent, et donne pour tout ε suffisamment petit

$$\sup_{x \in [-M,M]} |f * g_\varepsilon(x) - f(x)| \leq \omega_M(\varepsilon \max\{|a|,|b|\}),$$

ce que l'on voulait démontrer. $\square$

L'un des intérêt du produit de convolution est que, si f est continue et g de classe $\mathcal{C}^k$, alors $f * g_\varepsilon$ est de classe $\mathcal{C}^k$ pour tout $\varepsilon > 0$. On peut ainsi approcher uniformément (respectivement, uniformément sur tout compact) une fonction uniformément continue (respectivement, continue) par une suite de fonctions $\mathcal{C}^k$, et en particulier [3] de fonctions $\mathcal{C}^\infty$.

Il est possible d'approcher uniformément sur $\mathbb{R}$ n'importe quelle fonction continue par une suite de fonctions $\mathcal{C}^\infty$, mais cela demande un peu plus de travail et, de préférence, quelques outils supplémentaires [4].

8 Références

[FGN·Ana1] : *Oraux X-ENS. Analyse 1.* S. Francinou, H. Gianella, S. Nicolas.
[FGN·Ana3] : *Oraux X-ENS. Analyse 3.* S. Francinou, H. Gianella, S. Nicolas.
[FGN·3] : *Oraux X-ENS. 3.* Nouvelle série. S. Francinou, H. Gianella, S. Nicolas.
[Gou] : *Les maths en tête, Analyse.* X. Gourdon.
[KM] : *Agrégation interne de mathématiques. Analyse pour le second oral.* S. Kobeissi et D. Meneu.
[Moi] : *Mathématiques supérieures, Analyse.* J. Moisan, F. Chanet, F. Delmas, N. Tosel.
[Rom] : *Éléments d'analyse réelle.* J.-E. Rombaldi.
[Ska] : *Analyse.* G. Skandalis.
[RW·L2] : *Mathématiques tout-en-un pour la Licence 2.* J.P. Ramis et A. Warusfel.

3. En utilisant des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ à support compact, cf. la feuille d'exercices.
4. Tels que des partitions lisses de l'unité.