# Fonctions continues d'une variable réelle : Compléments 1. Compacité. Notes de cours.

## Table des matières

Ces notes abordent la notion de compacité.

Rappelons qu'une partie $K$ d'un espace topologique $X$ est dite **séquentiellement compacte** si toute suite à valeurs dans $K$ admet une valeur d'adhérence qui appartient à $K$. Si $X$ est un espace métrique, alors cette définition coïncide avec la définition plus générale de partie compacte d'un espace topologique (théorème de Bolzano-Weierstrass).

La compacité a de nombreuses applications, que nous ne mentionnerons pas toutes ici. Notamment, nous ne parlerons pas :

- Des applications à la continuité uniforme (théorème de Heine, d'Arzelà-Ascoli), qui seront traitée dans les notes suivantes.
- Des applications à l'analyse fonctionnelle (compacité en dimension infinie, opérateurs compacts), hors le théorème d'Arzelà-Ascoli déjà mentionné.
- Des applications à l'algèbre (décomposition d'Iwasawa, sous-groupes compacts).
- De la notion de *convergence uniforme* (ou $\mathcal{C}^1$, ou $\mathcal{C}^k$) *sur tout compact*, précieuse mais mieux à sa place dans des chapitres sur les séries de fonctions ou les intégrales à paramètres.

# 1 Images directes

La propriété la plus importante des espaces compacts est

**Théorème 1.**
*Soient $K$ un espace métrique compact, $Y$ un espace métrique et $f : K \to Y$ une application continue. Alors $f(K)$ est compact.*

Ce théorème a ceci de spécifique que beaucoup de propriétés topologiques se comportent bien vis-à-vis des images inverses ; par exemple, l'image inverse d'un ouvert par une application continue est un ouvert. Cette propriété (comme la connexité) se comporte bien par image directe.

*Démonstration.*
Soit $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $f(K)$. Par définition, il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $K$ telle que $fx_n) = y_n$ pour tout $n$. Comme $K$ est compact, il existe une sous-suite extraite $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ convergeant vers un point $x \in K$. Par continuité, $(f(x_{n_k}))_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(x) \in f(K)$. Mais $f(x_{n_k}) = y_{n_k}$ pour tout $k$, donc la sous-suite extraite $(y_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(x) \in f(K)$.

Toute suite à valeurs dans $f(K)$ admet une valeur d'adhérence dans $f(K)$, donc $f(K)$ est compact. $\square$

Le corollaire suivant est l'application la plus fréquente de ce théorème. Il est utilisable dans la grande majorité des sujets d'écrit d'analyse, et ses hypothèses sont à vérifier systématiquement. En particulier, l'ensemble $K$ et la fonction $f$ doivent **absolument** être explicités.

**Corollaire 1.1.**
*Soient $K$ un espace métrique compact et $f : K \to \mathbb{R}$ une application continue. Alors $f$ est bornée et atteint ses bornes.*

*Démonstration.*
Par le théorème précédent, $f(K)$ est compact. Or les compacts de $\mathbb{R}$ sont les fermés bornés, donc $f(K)$ est borné, donc $f$ est bornée. De plus, $f(K)$ est fermé, donc $\sup f(K)$ et $\inf f(K)$ (qui sont bien définis car $f$ est bornée) appartient à $f(K)$, donc il existe $x, y \in K$ tels que $f(x) = \max_K f = \sup_K f$ et $f(y) = \min_K f = \inf_K f$. $\square$

On peut aussi affiner légèrement le théorème des valeurs intermédiaires.

**Corollaire 1.2.**
*Soient $I \subset \mathbb{R}$ un segment et $f : I \to \mathbb{R}$ une application continue. Alors $f(I)$ est un segment.*

*Démonstration.*
$f(I)$ est un intervalle par le théorème des valeurs intermédiaires, et $f(I)$ est fermé et borné dans $\mathbb{R}$ car compact, donc $f(I)$ est un segment. □

**Exercice 1.3.**
*Soit $I$ un intervalle ouvert ou semi-ouvert et $f : I \to \mathbb{R}$ une application continue. Alors $f(I)$ peut être ouvert, semi-ouvert ou fermé. Illustrez chacune des 6 possibilités.*

## 2 Parties compactes de $\mathbb{R}^n$

Pour pouvoir utiliser le théorème précédent, il reste à savoir ce qu'est un compact. Dans $\mathbb{R}$, nous savons déjà que ce sont les fermés bornés.

**Proposition 2.1.**
*Soit $K$ un compact d'un espace métrique. Alors $K$ est fermé et borné.*

La démonstration en est la même que dans le cas réel. La réciproque est en général fausse.

**Proposition 2.2.**
*Soit $K$ un compact d'un espace métrique. Soit $F \subset K$ un fermé. Alors $F$ est compact.*

*Démonstration.*
Toute suite à valeurs dans $F$ est aussi à valeurs dans $K$. Par compacité de $K$, elle admet une valeur d'adhérence dans $K$. Comme $F$ est fermé, cette valeur d'adhérence est dans $F$. □

**Proposition 2.3.**
*Soient $K_1$, $K_2$ deux compacts. Alors $K_1 \times K_2$ est compact.*

Remarquons que l'on a défini la compacité dans le cadre d'espaces métriques. Ainsi, dans cet énoncé, $K_1$ et $K_2$ sont des compacts de deux espaces métriques $(X_1, d_1)$ et $(X_2, d_2)$ ; l'ensemble $K_1 \times K_2$ est un compact de $X_1 \times X_2$, qui est métrique par exemple pour la distance $\max\{d_1, d_2\}$.

*Démonstration.*
Soit $(x_n, y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $K_1 \times K_2$. Par compacité, il existe une sous-suite extraite $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ convergeant vers $x \in K_1$. Par compacité, on peut ré-extraire une sous-suite $(y_{n_{k_\ell}})_{\ell \in \mathbb{N}}$ de $(y_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ convergeant vers $y \in K_2$. Mais alors $(x_{n_{k_\ell}}, y_{n_{k_\ell}})_{\ell \in \mathbb{N}}$ converge vers $(x, y) \in K_1 \times K_2$. □

**Remarque 2.4.**
*Par récurrence, tout produit fini de compacts est compact. Plus généralement, le théorème de Tychonoff affirme que tout produit de compact est compact. Ce théorème utilise l'axiome du choix. De plus, une utilisation effective de ce théorème nécessite de comprendre la topologie produit pour des produits infinis, ce qui peut être délicat.*

Grâce à ces deux propositions, on peut caractériser les compacts des espaces vectoriels réels (ou complexes) de dimension finie.

**Théorème 2** (Heine-Borel)**.**
*Soit $n \geq 0$. Les compacts de $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$ (ou $\mathbb{C}^n$) sont les fermés bornés.*

*Démonstration.*
On sait déjà que les compacts sont fermés bornés ; il reste à montrer que les fermés bornés sont compacts. Soit $K$ un fermé borné de $\mathbb{R}^n$.

Comme $K$ est borné pour $\|\cdot\|_\infty$, il existe $M \geq 0$ tel que $K \subset [-M, M]^n$. Or chaque segment $[-M, M]$ est compact, un produit de compacts est compact, et $[-M, M]^n \subset \mathbb{R}^n$ est bien muni de la topologie produit, donc $[-M, M]^n$ est compact. De plus, $K$ est fermé, et un fermé d'un compact est compact, donc $K$ est compact. □

En dimension infinie, la situation est très différente : la plupart des fermés bornés ne sont alors pas compacts. Par exemple, dans tout espace vectoriel réel normé de dimension infinie, la boule unité fermée n'est pas compacte ! Un autre exemple est la suite de fonctions $f_n : x \mapsto x^n$ dans $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$, qui est bornée mais n'admet pas de sous-suite convergente dans $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ (en particulier, son adhérence est un fermé borné non compact).

Nous renvoyons la lectrice un théorème d'Arzelà–Ascoli (notes suivantes) pour des exemples de parties fermées dans des espaces vectoriels de dimension infinie.

# 3 Application 1 : Équivalence de normes en dimension finie

**Théorème 3** (Équivalence de normes)**.**
*Soit $E$ un espace vectoriel réel ou complexe de dimension finie. Soient $N$, $N'$ deux normes sur $E$. Alors il existe $C \geq 1$ tel que, pour tout $x \in E$,*

$$\frac{1}{C} N(x) \leq N'(x) \leq C N(x).$$

*On dit aussi que $N$ et $N'$ sont équivalentes.*

*Démonstration.*
Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de $E$. Soit $\|\cdot\|_\infty$ la norme du supremum des coordonnées. La notion d'équivalence étant une relation d'équivalence sur les normes, par transitivité, il suffit de montrer que toute norme $N$ est équivalente à $\|\cdot\|_\infty$.

Soit $x = \sum_{i=1}^n X_i e_i \in E$. Alors $N(x) \leq \sum_{i=1}^n |X_i| N(e_i)$ par l'inégalité triangulaire et l'homogénéité de $N$. Donc

$$N(x) \leq n \max_{1 \leq i \leq n} \{|X_i| N(e_i)\} \leq n \max_{1 \leq i \leq n} \{|X_i|\} \cdot \max_{1 \leq i \leq n} \{N(e_i)\} = n \max_{1 \leq i \leq n} \{N(e_i)\} \|x\|_\infty .$$

D'une part, on a majoré $N(x)$ par $C \|x\|_\infty$ pour une certaine constante $C$, ce qui est la moitié du résultat voulu. D'autre part, $N(x - y) \leq C \|x - y\|_\infty$ pour tous $x$, $y \in E$, donc $N$ est lipschitzienne, et en particulier continue, pour la norme $\|\cdot\|_\infty$.

Soit $\mathbb{S}_E := \{x \in E : \|x\|_\infty = 1\}$. Alors $\mathbb{S}_E$ est fermé borné pour $\|\cdot\|_\infty$, donc compact pour la topologie engendrée par cette norme. Donc $N$ atteint son minimum sur $\mathbb{S}_E$. Or $N(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{S}_E$, donc ce minimum est strictement positif. Il existe donc une constance $c > 0$ telle que $N(x) \geq c$ pour tout $x \in \mathbb{S}_E$.

Finalement, pour tout $x \in E \setminus \{0\}$, on a $N(x) = \|x\|_\infty N(x / \|x\|_\infty) \geq c \|x\|_\infty$, et $N(0) \geq c \|0\|_\infty$. Ceci fournit la deuxième inégalité souhaitée. □

**Remarque 3.1.**
*Ce théorème est faux en dimension infinie. Nous verrons plus tard le contre-exemple des normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sur $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$.*

**Remarque 3.2.**
*Le théorème de Heine-Borel avait été énoncé pour la norme $\|\cdot\|_\infty$ sur $\mathbb{R}^n$. D'après ce théorème, il est valable pour toute norme sur tout $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. On l'énonce donc plus fréquemment sous la forme "Les compacts de $\mathbb{R}^n$ sont les fermés bornés", sans préciser de norme, car la notion de partie bornée ne dépend pas de la norme en dimension finie.*

**Exemple 3.3.**
*Les groupes $O(n)$ et $SO(n)$ sont fermés et bornés dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, donc compacts.*

# 4 Application 2 : Théorème de Stone-Weirstrass

Le théorème de Stone-Weierstrass joue un rôle important en analyse. En particulier son application aux polynômes trigonométriques jouera un rôle clef en analyse de Fourier.

## 4.1 Sous-algèbres et théorème de Stone-Weierstrass

**Définition 4.1.**
*Une **algèbre** est un espace vectoriel $A$ muni d'une opération de multiplication $* : A \times A \to A$ qui soit bilinéaire et associative.*

*Une **sous-algèbre** est un sous-espace vectoriel $B$ stable par $*$ : pour tous $x$, $y \in B$, on a $x * y \in B$.*

Les exemples clefs sont les espaces de fonctions $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$, $\mathcal{C}^k(I, \mathbb{R})$... qui sont des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels. On peut multiplier les fonctions point par point, ce qui fournit l'opération $*$, qui est bien bilinéaire et associative.

Si $X$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, alors l'espace des fonctions polynômiales, ou des polynômes trigonométriques, sont des sous-algèbres de $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ (ou $\mathcal{C}(X, \mathbb{C})$ suivant que l'on autorise les valeurs complexes ou non).

**Théorème 4** (Stone-Weierstrass)**.**
*Soit $K$ un espace métrique compact. Soit $A$ une sous-algèbre de $\mathcal{C}(K, \mathbb{R})$. Supposons que*
- ▷ *$A$ contient la fonction $\mathbf{1}$ constante égale à $1$ ;*
- ▷ *$A$ sépare les points : pour tous $x \neq y \in K$, il existe $f \in A$ telle que $f(x) \neq f(y)$.*

*Alors $A$ est dense dans $\mathcal{C}(K, \mathbb{R})$ : pour toute $f \in \mathcal{C}(K, \mathbb{R})$, il existe une suite $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions de $A$ convergeant uniformément vers $f$.*

La démonstration est assez longue, et sera omise.

## 4.2 Applications

Les deux exemples principaux sont :
- ▷ La sous-algèbre des fonctions polynômiales sur un segment $[a, b]$.
- ▷ La sous-algèbre des polynômes trigonométrique sur le cercle $[0, 1]_{0\sim1}$.

Pour le premier : les fonction polynômiales sont continues sur $[a, b]$, et l'ensemble des fonctions polynômiales contient $\mathbf{1}$, est stable par addition, multiplication par un réel et multiplication point par point. De plus, les fonctions polynômiales séparent les points (il suffit de considérer $f(x) = x$). Donc les fonctions polynômiales sont denses dans $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$.

Pour le second : les polynômes trigonométriques sont continus sur $[0, 1]_{0\sim1}$, et l'ensemble des polynômes trigonométriques contient $\mathbf{1} = e^{0x}$, est stable par addition, multiplication par un réel et multiplication point par point. De plus, polynômes trigonométriques séparent les points (il suffit de considérer $f(x) = \cos(2\pi x)$ et $g(x) = \sin(2\pi x)$, en se rappelant que l'on a identifié 0 et 1). Donc les polynômes trigonométriques sont denses dans $\mathcal{C}([0,1]_{0\sim 1}, \mathbb{R})$. Autrement dit, les polynômes trigonométriques sont denses dans l'espace des fonctions continues 1-périodiques sur $\mathbb{R}$.

Le théorème de Stone-Weierstrass s'applique à des situations plus diverses. On peut ainsi montrer aussi facilement que l'ensemble des fonctions polynômiales à 2 variables est dense dans $\mathcal{C}([a,b] \times [c,d], \mathbb{R})$.

# 5 Application 3 : Coercivité et ellipsoïde de John

## 5.1 Coercivité

Une application importante de la compacité est la suivante.

**Définition 5.1.**
*Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que $\lim_{x\to\infty} f(x) = \ell$ si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $K$ tel que $|f(x) - \ell| \leq \varepsilon$ pour tout $x$ tel que $\|x\| \geq K$.*

La définition des limites infinies est laissée au lecteur.

**Proposition 5.2** ([Gou, Chapitre 1.3, Exercice 3])**.**
*Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continue telle que $\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty$. Alors $f$ est bornée inférieurement et atteint son minimum.*

*Démonstration.*
Soit $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Comme $\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty$, il existe $M \geq 0$ tel que $f(x) \geq f(x_0)$ dès que $\|x\| \geq M$. Mais alors $\inf_{\mathbb{R}^n} f = \inf_{\overline{B}(0,M)} f$. Or $\overline{B}(0,M)$ est compact par le théorème de Heine-Borel, donc $f$ atteint son infimum sur cette boule, donc il existe $x \in \overline{B}(0,M)$ tel que $f(x) = \min_{\mathbb{R}^n} f$. □

Cette idée est flexible, en ce qu'elle s'adapte à de nombreuses situations : fonctions définies sur des ouverts de $\mathbb{R}^n$ (dans ce cas, $f$ doit tendre vers $+\infty$ quand on se rapproche du bord de l'ouvert ou de l'infini), voire en dimension infinie (mais, dans ce cas, $f$ doit être grande en-dehors de compacts ; on parle de fonctions coercives).

**Exemple 5.3.**
*Soit $ABC$ un triangle dans le plan euclidien. Alors il existe un point $G$ qui minimise la somme des carrés des distances $f(M) := MA^2 + MB^2 + MC^2$. En effet, $f$ est continue et est supérieure à $M \mapsto MA^2$, donc tend vers $+\infty$ en l'infini.*

*Le minimiseur de $f$ est unique : c'est le centre de gravité du triangle. Cela se démontre par exemple en dérivant $f$ et en montrant qu'elle a un unique point critique, qui est le centre de gravité du triangle. On peut aussi passer en coordonnées et factoriser astucieusement $f$.*

**Exemple 5.4.**
*Soit $ABC$ un triangle dans le plan euclidien. Alors il existe un point $F$ qui minimise la somme des distances $f(M) := MA + MB + MC$. En effet, $f$ est continue et est supérieure à $M \mapsto MA$, donc tend vers $+\infty$ en l'infini.*

*Le minimiseur de $f$ est unique : c'est le point de Fermat du triangle. L'analyse en est plus délicate, car $f$ n'est pas dérivable partout, donc l'analyse de ses points critiques (s'ils existent !) n'est pas suffisante. Nous renvoyons la lectrice intéressée vers [Ska, Exercice 8.10].*

**Exemple 5.5.**
*Soit* $\|\cdot\|$ *une norme sur* $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$*. Soit* $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *une fonction continue. Soit* $n\geq 0$*. Alors la fonction* $P\mapsto \|f-P\|$ *est continue sur* $\mathbb{R}_n[X]$*, de par l'inégalité triangulaire et l'équivalence des normes sur* $\mathbb{R}_n[X]$ *en dimension finie. De plus, elle tend vers* $+\infty$ *en l'infini. Elle atteint donc son minimum.*

*Autrement dit, à degré fixé, il existe un polynôme qui approche* $f$ *"le mieux possible" pour la norme* $\|\cdot\|$*. Ce polynôme n'est pas nécessairement unique. Dans cet argument,* $\mathbb{R}_n[X]$ *peut être remplacé par n'importe quel sous-espace de* $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ *de dimension finie.*

## 5.2 Ellipsoïde de John

**Théorème 5** ([KM, Chapitre XVII, Exercice 6][Ska, Exercice 7.23])**.**
*Soit* $K$ *un compact d'intérieur non vide de* $\mathbb{R}^n$*. Il existe un unique ellipsoïde contenant* $K$ *de volume minimal, appelé ellipsoïde de John de* $K$*.*

Nous ne détaillerons pas ce développement, qui serait trop long à ce point du cours (il faudrait traiter les formes quadratiques, les ellipsoïdes...). Nous en donnons les grandes lignes, et renvoyons à la référence pour les détails.

- ▷ L'ensemble des ellipsoïdes de $\mathbb{R}^n$ peut être paramétré par un nombre fini $N$ de réels. Par exemple, un ellipsoïde est uniquement déterminé par une équation de la forme $X^tAX+BX=1$, où $A$ est une matrice symétrique définie positive et $B$ une forme linéaire, donc $N=n(n+3)/2$ convient.
- ▷ L'ensemble des ellipsoïdes contenant $K$ est non vide, et fermé non seulement dans l'espace des ellipsoïdes, mais aussi dans $\mathbb{R}^N$ (on utilise ici la compacité de $K$). Notons $F$ l'ensemble de ces paramètres.
- ▷ La fonction Vol définie sur $F$ tend vers l'infini en l'infini, car $K$ est d'intérieur non vide.

On peut donc adapter le résultat précédent à la fonction volume sur $F$, ce qui démontre l'existence d'un minimiseur.

L'unicité se montre à l'aide d'une inégalité de convexité (inégalité de type arithmético-géométrique).

# 6 Application 4 : Intersections de compacts et théorème de Dini

Nous montrons ici qu'une intersection décroissante de compacts non vides est non vide. Ce théorème a de nombreuses applications de technicités diverses, comme par exemple le théorème de Baire dans les espaces localement compacts, ou la définition de parties fractales [1] de $\mathbb{R}^n$. Nous en donnons une, le théorème de Dini.

## 6.1 Intersections de compacts

Le théorème suivant est le cœur de cette partie.

**Théorème 6.**
*Soit* $X$ *un espace métrique et* $(K_n)_{n\geq 0}$ *une suite de compacts non vides de* $X$ *qui est décroissante pour l'inclusion (i.e.* $K_{n+1}\subset K_n$ *pour tout* $n$*).*

*Alors* $\bigcap_{n\geq 0} K_n$ *est non vide.*

1. Ensembles de Julia, systèmes de fonctions itérées...

*Démonstration.*
Les $K_n$ étant non vides, choisissons un point $x_n$ dans chacun d'entre eux. Par décroissance, $x_n \in K_0$ pour tout $n$, et la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a un point d'adhérence $x \in K_0$ par compacité de ce dernier.

Soit $N \in \mathbb{N}$. Alors, par décroissance encore, $x_n \in K_N$ pour tout $n \geq N$, donc l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite est dans $K_N$ (ce dernier ensemble étant fermé), donc en particulier $x \in K_N$.

Ceci étant vrai pour tout $N \geq 0$, on obtient finalement $x \in \bigcap_{n\geq 0} K_n$, et ce dernier ensemble est par conséquent non vide. □

### 6.2 Théorème de Dini

Le théorème de Dini éclaire de lien entre convergence simple et convergence uniforme dans le cadre des suites monotones de fonctions.

**Théorème 7** (Théorème de Dini [FGN·Ana3, Exercice 2.30][KM, Chapitre IV, Exercice 2])**.**
*Soit $K$ un compact et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions dans $\mathcal{C}(K,\mathbb{R})$. Supposons que :*
- ▷ *$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone, i.e. $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante pour tout $x \in K$, ou décroissante pour tout $x \in K$.*
- ▷ *$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers une fonction $f \in \mathcal{C}(K,\mathbb{R})$.*

*Alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $f$.*

*Démonstration.*
Sans perte de généralité, supposons que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante ; en particulier, $f_n \leq f$ pour tout $n$. Soit $\varepsilon > 0$. Notre but est de montrer que $f_n > f - \varepsilon$ pour tout $n$ suffisamment grand.

Posons $K_n := \{x \in K : \ f_n(x) \leq f(x) - \varepsilon\}$ pour tout $n$. Ces ensembles sont compacts car fermés dans le compact $K$. Ils sont aussi décroissants pour l'inclusion : si $x \in K_{n+1}$, alors $f_n(x) \leq f_{n+1}(x) \leq f(x) - \varepsilon$, donc $x \in K_n$.

Ainsi, si tous les $K_n$ sont non vides, alors leur intersection est non vide. Or un point de leur intersection est un point $x$ tel que $f_n(x) \leq f(x) - \varepsilon$ pour tout $n$, et donc tel que $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers $f(x)$. Cela contredit la convergence simple de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers $f$. Donc il existe $N$ tel que $K_N = \emptyset$, et par décroissance $K_n = \emptyset$ pour tout $n \geq N$. Par définition des $K_n$, cela revient à dire que $f_n > f - \varepsilon$ pour tout $n \geq N$, ce que l'on voulait démontrer. □

## 7 Application 5 : Compacité et distances

### 7.1 Distance à un compact

**Définition 7.1** (Distance entre parties)**.**
*La distance entre deux parties $A$ et $B$ d'un espace métrique $X$ est définie par*

$$d(A,B) = \inf\{d(a,b) : \ a \in A, \ b \in B\}.$$

Contrairement à ce que la notation suggère, il ne s'agit pas d'une distance sur l'espace des parties de $X$ : elle n'est pas définie positive (deux parties ayant un point en commun sont à distance nulle), et ne satisfait pas l'inégalité triangulaire. Elle est cependant positive et symétrique.

Le lien avec la compacité est le suivant :

**Proposition 7.2** ([Gou, Chapitre 1.3, Exercice 3])**.**
*Soient $F$ un fermé et $K$ un compact de $\mathbb{R}^n$, tous deux non vides. Alors l'infimum est un minimum : il existe $x \in K$ et $y \in F$ tels que $d(K,F) = d(x,y)$.*

*Démonstration.*
Si $F$ est borné, alors $F$ est compact, et $K \times F$ aussi. La fonction distance restreinte à $K \times F$ est continue, donc elle atteint son minimum en une paire $(x, y)$ qui convient.

Si $F$ n'est pas borné, alors la fonction distance restreinte à $K \times F$ est continue et tend vers $+\infty$ en $+\infty$. Plus précisément, soit $m$ une borne de $K$. Étant donné $M \geq 0$, si $y \in F$ est tel que $\|y\| \geq M + m$, alors $d(x, y) \geq M$ pour tout $x \in K$. En particulier, fixons $x_0 \in K$ et $y_0 \in F$. Si $\|y\| \geq d(x_0, y_0) + m + 1$, alors $d(x, y) \geq d(x_0, y_0) + 1$ pour tout $x \in K$. Par conséquent,

$$d(K, F) = \inf\{d(x, y) : \ x \in K, \ y \in F \cap \overline{B}(0, d(x_0, y_0) + m + 1)\}.$$

On s'est ramené au cas de deux ensembles compacts, pour lequel le minimum est atteint. □

**Exercice 7.3.**
*Montrez à l'aide d'un exemple que l'infimum n'est pas toujours un minimum quand on considère la distance entre deux fermés.*

## 7.2 Distance entre compacts

On peut aussi définir une vraie distance entre compacts d'un espace métrique.

**Définition 7.4** (Épaississement)**.**
*Soient $A$ une partie d'un espace métrique $X$ et $\varepsilon > 0$. Le $\varepsilon$-voisinage de $A$ est*

$$B(A, \varepsilon) := \{x \in X : \ d(\{x\}, A) \leq \varepsilon\}.$$

**Remarque 7.5.**
*Un singleton $\{x\}$ étant compact, si $A$ est un fermé de $\mathbb{R}^n$, alors l'infimum dans la définition de $d(\{x\}, A)$ est atteint. Dans ce cas,*

$$B(A, \varepsilon) := \{x \in X : \ \exists y \in A, d(x, y) \leq \varepsilon\}.$$

**Définition 7.6** (Distance de Hausdorff)**.**
*Pour tous compacts $K_1$, $K_2$ non vides d'un espace métrique $X$, on note*

$$d_H(K_1, K_2) := \inf\{\varepsilon > 0 : \ K_1 \subset B(K_2, \varepsilon) \ \text{et} \ K_2 \subset B(K_1, \varepsilon)\}$$

*la **distance de Hausdorff** entre $K_1$ et $K_2$.*

**Proposition 7.7** ([RW·L2, Exercice 11 p. 512])**.**
*La distance de Hausdorff sur $X$ est une distance sur l'espace des parties compactes non vides de $X$.*

*Démonstration.*
Soient $x_0 \in K_1$ et $y_0 \in K_2$. Soit $m_1 := \max\{d(x, x') : \ x, x' \in K_1\}$, et de même pour $K_2$. Alors tout point de $K_1$ est à distance au plus $d(x_0, y_0) + m_1$ de $y_0$, donc $K_1 \subset B(K_2, d(x_0, y_0) + m_1)$. De même, $K_2 \subset B(K_1, d(x_0, y_0) + m_2)$. Par conséquent, $d_H(K_1, K_2)$ est fini (et même inférieur à $d(x_0, y_0) + \max\{m_1, m_2\}$).

Il est alors évident que $d_H$ est positive et symétrique.

Montrons l'inégalité triangulaire. Soient $K_1$, $K_2$, $K_3$ trois compacts, et $\varepsilon > 0$. Soient $x_1 \in K_1$. Il existe $x_2 \in K_2$ tel que $d(x_1, x_2) \leq d_H(K_1, K_2) + \varepsilon$. Il existe $x_3 \in K_3$ tel que $d(x_2, x_3) \leq d_H(K_2, K_3) + \varepsilon$. Par l'inégalité triangulaire usuelle, $d(x_1, x_3) \leq d_H(K_1, K_2) + d_H(K_2, K_3) + 2\varepsilon$, donc $K_1 \subset B(K_3, d_H(K_1, K_2) + d_H(K_2, K_3) + 2\varepsilon)$.

En échangeant $K_1$ et $K_3$, on trouve de même $K_3 \subset B(K_1, d_H(K_1, K_2) + d_H(K_2, K_3) + 2\varepsilon)$. Par conséquent, $d_H(K_1, K_3) \leq d_H(K_1, K_2) + d_H(K_2, K_3) + 2\varepsilon$. Le paramètre $\varepsilon$ étant arbitraire, on en déduit l'inégalité triangulaire pour $d_H$.

Il reste à montrer que $d_H$ est définie positive. Soient $K_1$, $K_2$ deux compacts à distance de Hausdorff nulle. Soit $x \in K_1$. Alors $x \in B(K_1, 1/n)$ pour tout $n \geq 1$, donc il existe une suite $(y_n)_{n \geq 1}$ à valeurs dans $K_2$ telle que $d(x, y_n) \leq 2/n$ pour tout $n \geq 1$. En particulier, $x \in \overline{K_2} = K_2$. Ceci étant vrai pour tout $x$, on obtient $K_1 \subset K_2$. En échangeant le rôle de $K_1$ et $K_2$, on montre finalement que $K_1 = K_2$. □

**Remarque 7.8.**
*La fonctionnelle $d_H$ est définie entre toutes les parties bornées non vides d'un espace métrique ; la compacité n'est utilisée ici que pour montrer que $d_H$ est définie positive.*

# 8 Application 6 : Transformations d'un compact

Il y aurait beaucoup à dire sur les transformations d'un compact, mais un grand nombre de résultats demande des notions sophistiquées (compacts invariants, minimalité) ou des outils eux aussi sophistiqués (théorie de Baire, théorie de la mesure). Nous avons sélectionné deux résultats plus élémentaires.

## 8.1 Dilatations

**Proposition 8.1** ([FGN·Ana3, Exercice 2.3][Gou, Chapitre 1.3, Exercice 5])**.**
*Soit $K$ un compact et $f : K \to K$ une dilatation, i.e ; une application telle que*

$$d(f(x), f(y)) \geq d(x, y) \quad \forall x, y \in K.$$

*Alors $f$ est une isométrie bijective.*

*Démonstration.*
Montrons dans un premier temps que tout point $a$ est valeur d'adhérence de la suite $(f^n(a))_{n \in \mathbb{N}}$. En effet, soit $b$ une valeur d'adhérence de $(f^n(a))_{n \in \mathbb{N}}$. Il existe donc une sous-suite extraite $(f^{n_k}(a))_{k \geq 0}$ convergeant vers $b$ ; quitte à extraire encore une sous-suite, on peut supposer que $(n_{k+1} - n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante.

Mais alors $d(f^{n_{k+1}}(a), f^{n_k}(a)) \geq d(f^{n_{k+1} - n_k}(a), a)$ par dilatation, et le membre de gauche tend vers $d(b, b) = 0$. Donc le membre de droite tend aussi vers 0 : on a trouvé une sous-suite extraite le long de laquelle $(f^n(a))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $a$.

On ne va pas appliquer ce qui précède à $f$, mais à un autre système. Posons $K' = K \times K$, qui est compact, et $g(x, y) = (f(x), f(y))$. Alors $g$ est une dilatation pour la distance $d_\infty((x, y), (x', y')) := \max\{d(x, y), d(x', y')\}$. Par conséquent, pour tous $a$, $b \in K$, on peut trouver une sous-suite extraite le long de laquelle $(g^n(a, b))_{n \in \mathbb{N}} = (f^n(a), f^n(b))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $(a, b)$. La suite $(d(f^n(a), f^n(b)))_{n \in \mathbb{N}}$ est donc croissante, vaut $d(a, b)$ en 0 et converge vers $d(a, b)$ le long d'une sous-suite ; elle est donc constante égale à $d(a, b)$. Autrement dit, $d(f(a), f(b)) = d(a, b)$ pour tous $a$, $b$, donc $f$ est une isométrie.

Il reste à montrer que $f$ est bijective. Mais $f$ est injective (comme toute isométrie). De plus, pour tout $a \in K$, le point $a$ est adhérent à $(f^n(a))_{n \in \mathbb{N}}$, donc $a \in \overline{f(K)}$. Or $f(K)$ est compact, donc fermé, donc $a \in f(K)$. Par conséquent, $f$ est aussi surjective. □

## 8.2 Contractions faibles

**Proposition 8.2** ([FGN·Ana3, Exercice 2.5][Gou, Chapitre 1.3, Exercice 4][Ska, Exercice 3.8]).
*Soit $K$ un compact et $f : K \to K$ une contraction faible, i.e ; une application telle que*

$$d(f(x), f(y)) < d(x, y) \quad \forall x \neq y \in K.$$

*Alors $f$ a un unique point fixe $\alpha$, et pour tout $x \in K$, la suite $(f^n(x))_{n \geq 0}$ converge vers $\alpha$.*

*Démonstration.*
Remarquons que $f$ est 1-lipschitzienne, donc continue. Montrons d'abord l'existence et l'unicité d'un point fixe. Soit $g(x) := d(x, f(x))$ pour $x \in K$. Alors $g$ est continue, donc atteint son minimum en un point $\alpha$. Si $f(\alpha) \neq \alpha$, alors $g(f(\alpha)) = d(f(\alpha), f^2(\alpha)) < d(\alpha, f(\alpha)) = g(\alpha)$, ce qui contredit la minimalité de $g(\alpha)$. Donc $f(\alpha) = \alpha$.

Soit $\beta$ un point fixe. Si $\beta \neq \alpha$, alors $d(\alpha, \beta) = d(f(\alpha), f(\beta)) < d(\alpha, \beta)$, ce qui est absurde. Donc $\alpha$ est l'unique point fixe de $f$.

Soit $x \in K$. Soit $\beta$ un point d'adhérence de la suite $(f^n(x))_{n\in\mathbb{N}}$, et supposons $\beta \neq \alpha$. Remarquons que la suite $(d(\alpha, f^n(x)))_{n\in\mathbb{N}}$ est positive décroissante, donc convergente ; et elle converge vers $d(\alpha, \beta)$ le long d'une sous-suite, donc elle converge vers $d(\alpha, \beta)$. Mais $d(\alpha, f(\beta)) < d(\alpha, \beta)$, donc $d(\alpha, f(x)) < d(\alpha, \beta)$ pour tout $x$ dans un voisinage de $\beta$, et en particulier il existe $n$ grand tel que $d(\alpha, f^n(x)) < d(\alpha, \beta)$. Cela contredit le fait que la suite $(d(\alpha, f^n(x)))_{n\in\mathbb{N}}$ décroît vers $d(\alpha, \beta)$. L'hypothèse de départ est donc absurde, donc $\alpha$ est le seul point d'adhérence de $(f^n(x))_{n\in\mathbb{N}}$, donc cette suite converge vers $\alpha$. □

**Remarque 8.3.**
*D'après le théorème du point fixe de Banach, dans un espace complet, les conclusions de cette proposition sont valides s'il existe $\lambda < 1$ tel que $d(f(x), f(y)) \leq \lambda d(x, y)$ pour tous $x$, $y$. Autrement dit, le taux de contraction doit être uniforme ; on parle parfois de* ***contractions fortes****.*

*Comme cette proposition le montre, on peut affaiblir l'hypothèse de contraction forte au prix de la compacité.*

**Exercice 8.4.**
*Construisez un contre-exemple aux conclusions de la proposition quand $K$ est fermé dans $\mathbb{R}^n$, mais pas compact.*

# 9 Références


[FGN·Ana1] : *Oraux X-ENS. Analyse 1.* S. Francinou, H. Gianella, S. Nicolas.
[FGN·Ana3] : *Oraux X-ENS. Analyse 3.* S. Francinou, H. Gianella, S. Nicolas.
[FGN·3] : *Oraux X-ENS. 3.* Nouvelle série. S. Francinou, H. Gianella, S. Nicolas.
[Gou] : *Les maths en tête, Analyse.* X. Gourdon.
[KM] : *Agrégation interne de mathématiques. Analyse pour le second oral.* S. Kobeissi et D. Meneu.
[Moi] : *Mathématiques supérieures, Analyse.* J. Moisan, F. Chanet, F. Delmas, N. Tosel.
[Rom] : *Éléments d'analyse réelle.* J.-E. Rombaldi.
[Ska] : *Analyse.* G. Skandalis.
[RW·L2] : *Mathématiques tout-en-un pour la Licence 2.* J.P. Ramis et A. Warusfel.