# Suites et fonctions réelles : Exercices

## Comparaison de fonctions

**Exercice 1.**
Soit $x_0 \in \mathbb{R}$.

1. Donnez un exemple de deux fonctions $f$ et $g$, chacune dominant l'autre en $x_0$, mais qui ne sont pas équivalentes en $x_0$.
2. Supposons que $f_1$ (respectivement, $f_2$) est équivalente à $g_1$ (respectivement, $g_2$) en $x_0$. Est-ce que $f_1 f_2$ est équivalente à $g_1 g_2$ ? Est-ce que $\varphi \circ f_1$ est équivalente à $\varphi \circ g_1$, où $\varphi$ est une fonction continue donnée ?
3. Supposons que $f =_{x_0} O(g)$. Montrez qu'il exite un voisinage $V$ de $x_0$ tel que tout zéro de $g$ dans $V$ soit aussi un zéro de $f$. En déduire que deux fonctions équivalentes en $x_0$ ont les même zéros dans un voisinage de $x_0$. Quelles sont les fonctions équivalentes en un point à la fonction nulle ? Construisez deux fonctions équivalentes en un point dont la différence n'est pas équivalente à 0 *(on ne peut pas "ajouter les équivalents")*.
4. Supposons que $f$ et $g$ sont équivalentes en $x_0$. Montrez qu'il existe un voisinage $V$ de $x_0$ tel que :
   ▷ $f$ et $g$ ont les mêmes zéros dans $v$ ;
   ▷ $f$ et $g$ ont le même signe là où elles ne s'annulent pas.

**Exercice 2.**

1. On définit $f$ et $g$ sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = |x|^{\frac{3}{2}} \quad \forall x \in \mathbb{R},$$
$$g(x) = |x|^{\frac{3}{2}} + x^2 \cos(1/x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^* \text{ et } g(0) = 0.$$
Montrez que $f$ et $g$ sont équivalentes en 0, mais que leurs dérivées ne le sont pas.
2. Soient $a \in \mathbb{R}$ et $f$, $g$ deux fonctions continues par morceaux au voisinage de $a$. Soit $F$ (respectivement, $G$) la primitive de $f$ (respectivement, $G$) sur un tel voisinage s'annulant en $a$. Supposons de plus que $g$ est à valeurs positives. Montrez que, si $g$ domine $f$ en $a$, alors $G$ domine $F$ en $a$. Montrez de plus que, si $f$ est équivalente à $g$ en $a$, alors $F$ est équivalente à $G$ en $a$.

**Exercice 3.** [FGN·Ana1, Exercice 4.3][FGN·3, Exercice 4.92]
Calculez
$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x^{\sinh(x)} - \sinh(x)^x}{x^{\sin(x)} - \sin(x)^x}.$$

**Exercice 4.**

1. On définit $f$ et $g$ sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = |x|^{\frac{3}{2}} \quad \forall x \in \mathbb{R},$$
$$g(x) = |x|^{\frac{3}{2}} + x^2 \cos(1/x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^* \text{ et } g(0) = 0.$$
Montrez que $f$ et $g$ sont équivalentes en 0, mais que leurs dérivées ne le sont pas.

2. Soient $a \in \mathbb{R}$ et $f$, $g$ deux fonctions continues par morceaux au voisinage de $a$. Soit $F$ (respectivement, $G$) la primitive de $f$ (respectivement, $G$) sur un tel voisinage s'annulant en $a$. Supposons de plus que $g$ est à valeurs positives. Montrez que, si $g$ domine $f$ en $a$, alors $G$ domine $F$ en $a$. Montrez de plus que, si $f$ est équivalente à $g$ en $a$, alors $F$ est équivalente à $G$ en $a$.

### Continuité, théorème des valeurs intermédiaires

**Exercice 5.** [Moi, Exercice 2 p. 70][Ska, Exercice 7.5]

1. Soit $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres rationnels convergeant vers $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. Pour tout $n$, notons $\alpha_n = \frac{p_n}{q_n}$ avec $p_n \in \mathbb{Z}$, $q_n \in \mathbb{N}$ et $p_n$, $q_n$ premiers entre eux. Montrez[1] que $\lim_{n\to+\infty} q_n = +\infty$.
2. Étudiez la continuité de la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{si } x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}, \quad p \in \mathbb{Z}, \quad q \in \mathbb{N}, \quad p \wedge q = 1\ ; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

**Exercice 6.** [Moi, Exercice A-2 p. 138][FGN·Ana1, Exercice 4.9][FGN·3, Exercice 4.16]
Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ une fonction continue telle que $f(0) = f(1) = 0$.

1. Soit $n \geq 1$ un entier et $a := \frac{1}{n}$. Montrez que l'équation

$$(*)\ :\ f(x+a) = f(x)$$

admet au moins une solution. Vous pourrez vous aider de la fonction auxiliaire $g : [0, 1-a] \to [-1,1]$ définie par $g(x) = f(x+a) - f(x)$.
2. Montez que si $a$ n'est pas l'inverse d'un entier, alors l'équation $(*)$ peut ne pas admettre de solution.
3. Application : un cycliste a parcouru 20 kilomètres en une heure ; montrer qu'il existe au moins un intervalle de durée une demi-heure pendant lequel il a parcouru exactement 10 kilomètres. Même question avec un intervalle de temps de 3 minutes et un parcours d'un kilomètre.

### Continuité uniforme

**Exercice 7.** [Moi, Exercice 6 p. 71][Ska, Exercice 7.2]
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue admettant des limites finies en $\pm\infty$. Montrez que $f$ est bornée et uniformément continue.

**Exercice 8.** [FGN·Ana1, Exercice 4.22][FGN·3, Exercice 4.33][Ska, Exercice 7.3]
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction uniformément continue.

1. Montrez qu'il existe $\alpha$, $\beta \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $|f(x)| \leq \alpha|x| + \beta$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. Montrez que $f(x) = x\sin(x)$ satisfait la condition précédente sans être uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

**Exercice 9. Prolongements de fonctions** [Ska, Exercice 7.7 pour la première question]

1. Soit $F$ une partie fermée de $\mathbb{R}$ et $f : F \to \mathbb{R}$ continue. Montrez qu'il existe une fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue étendant $f$ (c'est-à-dire telle que $g_{|F} = f$). On pourra étendre $f$ affinement sur le complémentaire de $F$, et vérifier que cette extension est continue.

1. Par exemple, mais pas nécessairement, par un raisonnement par l'absurde.

2. Soit $A$ une partie dense de $\mathbb{R}$ et $f : A \to \mathbb{R}$ uniformément continue. Montrez que, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy à valeurs dans $A$, alors $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy.
3. Soit $A$ une partie dense de $\mathbb{R}$ et $f : A \to \mathbb{R}$ uniformément continue. Montrez qu'il existe une unique fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue étendant $f$.
4. Le résultat précédent reste-t-il vrai si l'on suppose que $f$ est seulement continue ?

**Exercice 10. Produit de convolution**
Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux, nulle en-dehors du segment $[-1, 1]$, et d'intégrale 1. Soit $f$ une fonction continue. Pour tout $\varepsilon > 0$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose :

$$f_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-1} \int_{\mathbb{R}} f(t)\varphi(\varepsilon^{-1}(x-t))\,\mathrm{d}t.$$

1. Justifiez que $f_\varepsilon$ est bien définie.
2. Montrez que $\lim_{\varepsilon\to 0} f_\varepsilon(x) = f(x)$ pour tout réel $x$.
3. Montrez que, si $f$ est uniformément continue, alors $(f_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ converge uniformément vers $f$.
4. En supposant seulement que $f$ est continue, montrez que $(f_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ converge uniformément sur tout segment vers $f$.

## Fonctions dérivables

**Exercice 11.** [Gou, Exercice 9 p. 86][Ska, Exercice 7.11]
Posons $f(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n}\sin(10^n x)$ pour tout réel $x$. Montrez que $f$ est continue et nulle part dérivable.

**Exercice 12. Théorème des accroissements finis généralisé** [Moi, p. 108]
Soient $f$, $g$ deux fonctions de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$, continues sur $[a, b]$ et dérivables sur $(a, b)$. Montrez qu'il existe $c \in (a, b)$ tel que le déterminant suivant soit nul :

$$\begin{vmatrix} f(b)-f(a) & f'(c) \\ g(b)-g(a) & g'(c) \end{vmatrix}.$$

En traçant la courbe paramétrée $x \mapsto (f(x), g(x))$, donnez une interprétation géométrique de ce résultat.

**Exercice 13. Règle de l'Hôpital** [Moi, Exercice 6 p. 140]
Soit $I$ un intervalle réel et $a \in I$. Soient $f$, $g$ deux fonctions à valeurs réelles continues sur $I$, dérivables sur $I \setminus \{a\}$, et nulle en $a$.

1. Donnez un exemple de telles fonctions telles que la limite de $\frac{f}{g}$ en $a$ existe, mais que $\frac{f'}{g'}$ n'admette pas de limite en $a$.
2. Supposons que $g'$ ne s'annule pas sur $I \setminus \{a\}$ et que le quotient $\frac{f'}{g'}$ admette une limite $\ell$ (finie ou infinie) en $a$. Montrez que $\lim_a \frac{f}{g} = \ell$.
3. Application : calculez $\lim_{x\to 1^+} \frac{\operatorname{argcosh}(x)}{\arccos(1/x)}$.

**Exercice 14.** [Moi, Exercice B-1 p. 138][Ska, Exercice 7.15]
Soit $I$ un intervalle réel et $a < b$ deux points de $I$. Soit $f$ une application dérivable de $I$ dans $\mathbb{R}$. On définit deux applications $\varphi$, $\psi : I \to \mathbb{R}$ par :

$$\varphi(x) := \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \quad \forall x \in (a, b] \text{ et } \varphi(a) := f'(a) \; ;$$
$$\psi(x) := \frac{f(x)-f(b)}{x-b} \quad \forall x \in [a, b) \text{ et } \psi(b) := f'(b).$$

1. Montrez [2] que $[f'(a), f'(b)] \subset \varphi(I) \cup \psi(I)$.
2. Déduisez-en que $f'$ satisfait à la propriété des valeurs intermédiaires : l'image par $f'$ de tout sous-intervalle de $I$ est un intervalle.

### Références

[FGN·Ana1] : *Oraux X-ENS. Analyse 1.* S. Francinou, H. Gianella, S. Nicolas.
[FGN·3] : *Oraux X-ENS. 3.* Nouvelle série. S. Francinou, H. Gianella, S. Nicolas.
[Moi] : *Mathématiques supérieures, Analyse.* J. Moisan, F. Chanet, F. Delmas, N. Tosel.
[Ska] : *Analyse.* G. Skandalis.

2. Si $f'(a) < f'(b)$, et en adaptant l'énoncé dans les autres cas.