Leçon 205 : Écriture décimale d'un nombre réel. Cas des nombres rationnels. Notes de cours.

Table des matières

L'objectif de ces notes de cours est d'aborder les développements décimaux de nombres réels. Cette leçon a deux aspects, analytique (reposant sur les propriétés des réels) et arithmétiques (notamment concernant le développement décimal de nombres rationnels).

Nous adoptons le principe de ne travailler qu'avec des nombres dans $[0,1]$, ou de façon équivalente, avec des écritures décimales de partie entière nulle. Le cas général ne sera évoqué qu'à la fin.

Toutes les propriétés énoncées se généralisent à des bases quelconques. Cet aspect ne sera pas abordé, et laissé intégralement en exercice.

1 Signification d'une écriture décimale

Avant toute chose – et cela manque dans le plan de leçon joint – il faut donner un sens à une écriture décimale !

Propriété 1.1.
Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite à valeurs dans $\{0,\dots,9\}$. Alors la suite $(\sum_{k=1}^n a_k 10^{-k})_{n\geq 1}$ converge vers un réel $\ell \in [0,1]$.

Démonstration.
Posons $u_n := \sum_{k=1}^n a_k 10^{-k}$. La suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est positive et croissante. Pour montrer qu'elle converge et que sa limite appartient à $[0,1]$, il suffit de montrer qu'elle est majorée par 1.

Soit $n \geq 1$. Alors
$$u_n \leq \sum_{k=1}^{n} 9\cdot 10^{-k} = 9\cdot\frac{1}{10}\cdot\frac{1-\frac{1}{10^n}}{1-\frac{1}{10}} \leq 9\cdot\frac{1}{9} = 1,$$
ce qu'il fallait démontrer. □

Exercice 1.2.
Montrez directement qu'une telle suite est de Cauchy.

Les questions suivantes sont :
- ▷ Un nombre réel admet-il toujours une écriture décimale ?
- ▷ Un nombre réel admet-il au plus une écriture décimale ?

Autrement dit, l'application $(a_n)_{n\geq 1} \mapsto \sum_{k=1}^{+\infty} a_k 10^{-k}$ est-elle surjective ? Injective ?

2 Détour : un peu de topologie

L'application $S : (a_n)_{n\geq 1} \mapsto \sum_{k=1}^{+\infty} a_k 10^{-k}$ a pour domaine de définition $\{0,\dots,9\}^{\mathbb{N}^*}$ (l'espace des suites d'éléments de $\{0,\dots,9\}$) et pour co-domaine $[0,1]$.

L'espace $\{0,\dots,9\}^{\mathbb{N}^*}$ peut être muni de la topologie produit. Cet espace est alors compact (théorème de Tychonoff), et est un espace de Cantor [1].

De plus, l'application S est alors continue. Or une application continue bijective entre deux espaces topologiques compacts est un homéomorphisme. Donc, si S était bijective, alors l'espace de Cantor et $[0,1]$ seraient homéomorphes. C'est absurde : l'intervalle est connexe, contrairement à l'espace de Cantor.

Par contraposition, S n'est pas bijective. Cet argument – qui s'applique à de nombreux systèmes de numération, plus généraux que les écritures dans des bases diverses – montre que :
- ▷ ou il existe des nombres réels n'admettant pas d'écriture décimale ;
- ▷ ou il existe des nombres réels admettant plusieurs écritures décimales.

Comme nous le verrons, le problème proviendra de la non-injectivité de S.

1. Chose qu'il est plus facile de dessiner avec un développement binaire, c'est-à-dire avec l'espace $\{0,1\}^{\mathbb{N}^*}$

3 Approximations décimales d'un nombre réel

Références pour cette construction : [Moi, Chapitre I.A] [Ska, Chapitre I.2].

Nous notons ici $E : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ la fonction partie entière.

Définition 3.1 (Nombre décimal)**.**
*Un nombre rationnel x est dit **décimal** s'il existe $a \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$ tels que $x = \frac{a}{10^n}$. On note $\mathbb{D}$ l'ensemble des nombres décimaux.*

Exercice 3.2.
Montrez que $\mathbb{D}$ est un sous-anneau de $\mathbb{Q}$. Est-ce un corps ?

Définition 3.3 (Approximations décimales)**.**
*Pour tout réel x, notons $p_n := E(10^n x)$. On appelle $\frac{p_n}{10^n}$ l'**approximation décimale par défaut** de x à l'ordre n (ou à 10^{-n} près). Si $x \neq \frac{p_n}{10^n}$, alors $\frac{p_n+1}{10^n}$ est l'**approximation décimale par excès** de x à l'ordre n.*

Remarque 3.4.
Par définition de la fonction partie entière, pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, l'entier p_n est l'unique entier tel que $\frac{p_n}{10^n} \leq x < \frac{p_n+1}{10^n}$.

Exemple 3.5.
1,4142 est l'approximation décimale par défaut de $\sqrt{2}$ à 10^{-4} près, et 1,4143 son approximation décimale par excès au même ordre.

Théorème 1.
Les ensembles suivants sont denses dans $\mathbb{R}$: l'ensemble des nombres décimaux $\mathbb{D}$, l'ensemble des nombres rationnels $\mathbb{Q}$, l'ensemble des nombres irrationnels $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Démonstration.
Commençons par montrer que les nombres décimaux sont denses dans $\mathbb{R}$. Soient $x \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$. Comme $\lim_{n\to+\infty} 10^{-n} = 0$, il existe n tel que $10^{-n} \leq \varepsilon$. Mais comme $p_n 10^{-n} \leq x < (p_n + 1)10^{-n}$, on sait que $|x - p_n 10^{-n}| < 10^{-n} \leq \varepsilon$, donc $p_n 10^{-n} \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$. Donc $\mathbb{D} \cap (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ est non vide. Ceci étant vrai pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$, l'ensemble des nombres décimaux est bien dense dans $\mathbb{R}$.

L'ensemble $\mathbb{D}$ étant inclus dans $\mathbb{Q}$, l'ensemble des rationnels est aussi dense dans $\mathbb{R}$.

Finalement, $\sqrt{2}$ est irrationnel [2]. Soient $x \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$. Par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, il existe $q \in (x + \sqrt{2} - \varepsilon, x + \sqrt{2} + \varepsilon)$. Mais alors $q - \sqrt{2} \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$, donc $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ est non vide. Ceci étant vrai pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$, l'ensemble des irrationnels est bien dense dans $\mathbb{R}$. $\square$

4 Développement décimal d'un nombre réel

Théorème 2.
*Soit $x \in [0, 1)$. Il existe une unique suite $(a_n)_{n\geq 1}$, à valeurs dans $\{0, \ldots, 9\}$ et non stationnaire à 9, telle que $x = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n 10^{-n}$. On note $x = 0, a_1 a_2 \ldots$, et on appelle **développement décimal propre** de x cette écriture.*

2. Nous verrons dans une leçon ultérieure comment ce nombre est défini ; il peut être remplacé par n'importe quel nombre irrationnel, et la suite de la leçon donnera de nombreux critères pour en construire.

Démonstration.
Commençons par l'existence d'une telle écriture. Choisissons $a_n := p_n - 10p_{n-1}$ pour tout $n \geq 1$. On sait que :

- ▷ $p_n \leq 10^n x$, donc $10p_n \leq 10^{n+1}x$.
- ▷ p_{n+1} est le plus grand entier inférieur ou égal à $10^{n+1}x$, et en particulier $p_{n+1} \geq 10p_n$.
- ▷ p_n est le plus grand entier inférieur ou égal à $10^n x$, et en particulier $p_n + 1 > 10^n x$, donc $10p_n + 10 > 10^{n+1}x$, donc $p_{n+1} < 10p_n + 10$

Par conséquent, $a_n \in \{0, \dots, 9\}$ pour tout $n \geq 1$.

Par récurrence [3], en utilisant la définition des a_k, pour tout $n \geq 1$,

$$p_n = \sum_{k=1}^{n} a_k 10^{n-k}.$$

Il s'ensuit que $p_n 10^{-n} = \sum_{k=1}^{n} a_k 10^{-k}$ pour tout n.

Or la suite $(p_n 10^{-n})_{n\geq 0}$ converge vers x (par le même argument que celui utilisé pour montrer la densité de $\mathbb{D}$ dans $\mathbb{R}$). Donc la série $(\sum_{k=1}^{n} a_k 10^{-k})_{n\geq 1}$ converge vers x, ou encore $x = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k 10^{-k}$. Tout nombre réel admet donc une écriture décimale.

Supposons que la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ soit stationnaire à 9. Soit ℓ le plus petit rang tel que $a_k = 9$ pour tout $k \geq \ell$. Alors

$$\sum_{k=\ell}^{+\infty} a_k 10^{-k} = 9 \cdot 10^{-\ell} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = 10^{-(\ell-1)} \text{ ;}$$

donc $x = \sum_{k=1}^{\ell-1} a_k 10^{-k} + 10^{-(\ell-1)}$. Si $\ell = 1$, alors $x = 1$, ce qui est absurde. Supposons que $\ell \geq 2$. Alors

$$a_{\ell-1} = p_{\ell-1} - 10p_{\ell-2} = \sum_{k=1}^{\ell-1} a_k 10^{-(\ell-1-k)} + 1 - \sum_{k=1}^{\ell-2} a_k 10^{-(\ell-1-k)} = a_{\ell-1} + 1,$$

ce qui est absurde. Donc la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ ainsi obtenue n'est pas stationnaire à 9.

Montrons enfin l'unicité d'une telle suite. Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une telle suite. Alors, pour tout $n \geq 1$, par non-stationnarité à 9,

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k 10^{-k} < \sum_{k=n+1}^{+\infty} 9 \cdot 10^{-k} = 10^{-n},$$

donc $\sum_{k=1}^{n} a_k 10^{n-k} \leq 10^n x < \sum_{k=1}^{n} a_k 10^{n-k} + 1$. Mais, par définition de la suite $(p_n)_{n\geq 0}$, on a $p_n = \sum_{k=1}^{n} a_k 10^{n-k}$, et par conséquent $a_n = p_n - 10p_{n-1}$. □

Exercice 4.1.
Montrez que :

1. *Si $(a_n)_{n\geq 0}$ est stationnaire à 9, alors $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k 10^{-k}$ est décimal.*
2. *Tout nombre décimal est égal à une série $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k 10^{-k}$ avec $(a_n)_{n\geq 0}$ stationnaire à 9.*
3. *Un tel développement impropre d'un nombre décimal est unique.*

Remarque 4.2.

- ▷ *De plus, $a_n = p_n - 10p_{n-1}$ pour tout $n \geq 1$.*

3. À savoir rédiger !

▷ *Si l'on enlève la contrainte que la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ est non stationnaire à 9, alors il n'y a plus unicité du développement décimal : par exemple, $1 = 0,999\ldots$. Plus précisément, dans ce cadre, tout nombre décimal a exactement 2 développements décimaux, et tout nombre non décimal a un unique développement décimal. Le second développement décimal d'un nombre décimal est qualifié d'**impropre**.*
▷ *Soit x un nombre réel positif. Pour obtenir son développement décimal propre, on écrit $E(x)$ en base 10 avant la virgule, et le développement décimal propre de $x - E(x)$ après la virgule.*
▷ *Le développement décimal d'un nombre réel x strictement négatif est $-|x|$, c'est-à-dire le signe $-$ précédant le développement décimal de $|x|$.*

5 Développements décimaux des nombres rationnels

Référence pour ce développement : [Ska, Théorème I.3.1].

Définition 5.1.
*Soient P, $Q \geq 1$. Une suite $(a_n)_{n\geq 1}$ est **périodique de période** P **à partir du rang** Q si $a_{n+P} = a_n$ pour tout $n \geq Q$.*

Théorème 3.
Soit x un réel. Alors x est rationnel si et seulement si le développement décimal propre de x est périodique à partir d'un certain rang. Plus précisément, en écrivant $x = \frac{p}{2^m 5^n q}$ avec p, $2^m 5^n q$ premiers entre eux et n, $m \geq 0$:
▷ *le développement décimal de x est fini si et seulement si x est décimal, si et seulement si $q = 1$.*
▷ *sinon, le développement décimal de x a pour plus petite période l'ordre de 10 dans $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^*$, qui divise $\varphi(q)$; et ce développement décimal est périodique à partir du rang $1 + \max\{n, m\}$.*

Démonstration.
Étape 1 : Rationnalité des nombres dont le développement décimal est périodique à partir d'un certain rang.
Montrons dans un premier temps qu'un nombre réel dont le développement décimal propre est périodique à partir d'un certain rang est rationnel. Sans perte de généralité, $x \in [0, 1)$ est périodique de période P à partir d'un certain rang Q. Supposons dans un premier temps que $Q = 1$. Alors

$$x = \sum_{k=1}^{P} a_k 10^{-k} + \sum_{k=P+1}^{+\infty} a_{k-P} 10^{-k} = p_p 10^{-P} + 10^{-P} \sum_{k=1}^{+\infty} a_k 10^{-k} = p_p 10^{-P} + 10^{-P} x,$$

donc

$$x = \frac{p_P}{10^P(1 - 10^{-P})} = \frac{p_P}{10^P - 1}.$$

Donc x est rationnel. Si Q est quelconque, alors

$$x = \sum_{k=1}^{P} a_k 10^{-k} + \sum_{k=P+1}^{+\infty} a_{k-P} 10^{-k} = p_Q 10^{-Q} + 10^{-Q} \sum_{k=1}^{+\infty} a_{k+Q} 10^{-k},$$

et $(a_{k+Q})_{k\geq 1}$ est périodique à partir du rang 1, donc $\sum_{k=1}^{+\infty} a_{k+Q} 10^{-k}$ est rationnel, donc x est rationnel.
À partir de maintenant, nous supposons x rationnel, et plus précisément $x = \frac{p}{2^m 5^n q}$ avec p, $2^m 5^n q$ premiers entre eux et n, $m \geq 0$. Posons $\ell = \max\{m, n\}$.

Étape 2 : Cas des nombres décimaux.

On sait que x est décimal si et seulement si son développement décimal propre est fini [4] (si $x = p/10^n$ est décimal, alors $p_{n+k} = 10^k p$ et $a_{n+k} = 0$ pour tout $k \geq 1$; réciproquement, si le développement décimal de x est fini, il est évident que x est décimal).

On sait que x est décimal si et seulement si $q = 1$. Si x est décimal, écrivons $x = p/10^n$; en écrivant $p = p'2^{m'}5^{n'}$ avec $p' \wedge 10 = 1$, on a $x = p'/2^{n-m'}5^{n-n'}$. Réciproquement, si $q = 1$, alors $x = p/2^m5^n = p2^{\ell-m}5^{\ell-n}/10^\ell$, et x est décimal.

Remarquons de plus que l'écriture décimale propre d'un nombre décimal a $p/10^\ell$ avec p non divisible par 10 a exactement [5] ℓ décimales (en effet, $10^\ell x$ est un entier dont le chiffre des unités est non nul).

Étape 3 : Cas des nombres dont le dénominateur est premier avec 10.

Nous avons traité le cas des nombres décimaux ($q = 1$, et première alternative de la proposition). Supposons maintenant que $q > 1$ et que $m = n = 0$.

On sait que $p_n \leq \frac{10^n p}{q} \leq p_n + 1$ pour tout $n \geq 0$. Par conséquent, $10^n p - p_n q \in \{0, \ldots, q-1\}$. Posons $r_n := 10^n p\ [q]$. Comme q est premier avec 10, on a $10 \in (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^*$, donc la suite $(r_n)_{n\geq 0}$ est périodique et sa période minimale est l'ordre de 10 dans $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^*$. De plus, $10^n p = p_n q + r_n$, donc $qa_n = qp_n - 10qp_{n-1} = 10r_{n-1} - r_n$. Donc $qa_n \equiv -r_n\ [10]$. Soit s l'inverse de q modulo 10 ; alors $a_n = -sr_n\ [10]$. En particulier, $(a_n)_{n\geq 1}$ est périodique à partir du rang 1 et sa période minimale divise l'ordre de 10 dans $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^*$.

Soit P la période minimale de $(a_n)_{n\geq 1}$. Alors $\frac{p}{q} = \sum_{k=1}^P a_k 10^{-k} + 10^{-P}\frac{p}{q}$, donc $10^P p = qp_P + p$, donc $p10^P \equiv p\ [q]$; p étant premier avec q, on a finalement $10^P \equiv 1\ [q]$, donc P est divisible par l'ordre de 10 dans $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^*$. Finalement, la période minimale du développement décimal de p/q est exactement l'ordre de 10 dans $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^*$.

Étape 4 : Cas général.

Dans le cas général, $x = \frac{p}{2^m5^nq}$. Par le théorème de Bézout, il existe α, β entiers tels que $p = \alpha 2^m 5^n + \beta q$. De plus, α est premier avec q et β avec 2^m5^n. Mais alors $x = \frac{\beta}{2^m5^n} + \frac{\alpha}{q}$. Or le développement décimal de $\frac{\alpha}{q}$ est périodique à partir du rang 1, sa période est l'ordre de 10 dans $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^*$, et $\frac{\beta}{2^m5^n}$ a exactement ℓ décimales. En ajoutant les deux, la ℓ-ième décimale de $\frac{\alpha}{q}$ est modifiée, donc $\frac{p}{q}$ n'est périodique qu'à partir du rang $\ell + 1$. □

Exemple 5.2.

- ▷ $0,212121\ldots = \frac{21}{99} = \frac{7}{33}$. *Ici,* $p = 7$, $q = 33$ *et* $m = n = 0$. *Le développement décimal est périodique à partir du rang* 1, *de période* 2. *Remarquons que* $10^2 = 100 \equiv 1\ [33]$, *donc* 10 *est bien d'ordre* 2 *dans* $(\mathbb{Z}/33\mathbb{Z})^*$.
- ▷ $3,5212121\ldots = 3,5 + \frac{7}{330} = \frac{581}{165}$. *Ici,* $p = 581$, $q = 33$, $m = 0$ *et* $n = 1$. *Le développement décimal est périodique à partir du rang* 2, *de période* 2.

6 Quelques développements choisis

6.1 Non dénombrabilité de $\mathbb{R}$

Référence pour ce développement : [Ska, Théorème I.2.8].

4. Ou, de façon équivalente, stationnaire à 0.

5. Ce qui rejoint l'observation suivante : pour calculer l'écriture décimale de 2^{-n} (respectivement, 5^{-n}), il suffit de connaître l'écriture décimale de 5^n (respectivement, 2^n). Ainsi, $\frac{1}{5} = 0,2$; et $\frac{1}{25} = 0,04$; et $\frac{1}{125} = 0,008$; et $\frac{1}{625} = 0,0016$...

Théorème 4.
$\mathbb{R}$ est non dénombrable.

Démonstration.
Cela se fait par l'argument diagonal de Cantor. On procède par l'absurde ; supposons que $\mathbb{R}$ soit dénombrable. Alors il existe une bijection $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$, et en particulier une suite réelle surjective [6] $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Pour simplifier l'argument ci-dessous, posons $v_n := u_{n-1}$ pour tout $n \geq 1$.

Soit $(a_{n,k})_{k\geq 1}$ le développement décimal propre de v_n. Posons $b_n = 0$ si $a_{n,n} \neq 0$, et $b_n = 1$ si $a_{n,n} = 0$. Alors la suite $(b_n)_{n\geq 1}$ est à valeurs dans $\{0, \ldots, 9\}$ et est non stationnaire à 9. Soit $x := 0, b_1 b_2 \ldots$. Soit n tel que $v_n = x$, ce qui existe car la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ est surjective. Alors, par unicité du développement décimal propre, $b_k = a_{n,k}$ pour tout k, et en particulier $b_n = a_{n,n}$. Cela contredit la définition de la suite b_n. □

Remarque 6.1.
Il ne suffit pas de prendre $b_n \neq a_{n,n}$ sans plus de contrainte, ou de prendre benoîtement $b_n = a_n + 1$ [10] (par exemple) ; on risquerait d'obtenir une suite $(b_n)_{n\geq 1}$ stationnaire à 9, et le développement décimal propre de x serait alors distinct de $0, b_1 b_2 \ldots$, ce qui ferait perdre la contradiction.

Exercice 6.2.
(*) En prenant en compte la remarque précédente, rédigez l'argument diagonal de Cantor en utilisant le développement binaire au lieu du développement décimal.

6.2 Nombres de Liouville et transcendance

Références pour ce développement : [FGN·Alg1, ex. 5.55] [Mon, P. 4.2 p. 283] [Ska, ex. 1.4].

Définition 6.3 (Nombre de Liouville)**.**
*Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. On dit que x est **de Liouville** si, pour tout $r > 0$ et tout $C > 0$, il existe une infinité de rationnels p/q tels que*

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{C}{q^r}.$$

Théorème 5.
Tout nombre de Liouville est transcendant.

Démonstration.
Soit x un nombre irrationnel algébrique ; montrons que x n'est pas de Liouville. Soit $P(X) = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$ un polynôme à coefficients entiers tel que $P(x) = 0$, et $D := \max_{[x-1,x+1]} |P'|$. Soit p/q un nombre rationnel tel que $|x - p/q| \leq 1$. Alors

$$|P(p/q)| \leq |P(x)| + D \left| x - \frac{p}{q} \right| = D \left| x - \frac{p}{q} \right|.$$

De plus, $q^d P(p/q)$ est entier, donc $Dq^d \left| x - \frac{p}{q} \right|$ est entier. De plus, cet entier est non nul, car x est irrationnel. Donc

$$Dq^d \left| x - \frac{p}{q} \right| \geq 1,$$

6. Et injective, mais cela ne sert pas pour la suite de l'argument. Nous montrons en fait qu'il n'existe pas de fonction surjective $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

ou encore $\left|x-\frac{p}{q}\right| \geq \frac{1}{Dq^d}$ pour tout rationnel p/q tel que $|x-p/q| \leq 1$. Quitte à augmenter D, on a $\left|x-\frac{p}{q}\right| \geq \frac{1}{Dq^d}$ pour tout rationnel p/q, donc x n'est pas de Liouville. □

Remarque 6.4.
En fait, si x est irrationnel algébrique, alors pour $d' > 2$, il existe C tel que $\left|x-\frac{p}{q}\right| \geq \frac{C}{q^{d'}}$ pour tout rationnel. Autrement dit, l'exposant peut être pris aussi près de 2 que souhaité. Cette amélioration est légèrement plus compliquée à démontrer ; elle a valu a son auteur, Klaus Roth, une médaille Fields en 1958.

Proposition 6.5.
Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite à valeur dans $\{0,\dots,9\}$ et non stationnaire à 0. Alors $x = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n 10^{-n!}$ est un nombre de Liouville, et en particulier est transcendant.

Démonstration.
Tout d'abord, x est irrationnel car son développement décimal n'est pas périodique à partir d'un certain rang. Soient $r > 0$ et tout $C > 0$. Soit $n \geq 1$. Choisissons $\frac{p}{q} := \sum_{k=1}^{n} a_k 10^{-k!}$. Alors $q = 10^{n!}$, et

$$x - \frac{p}{q} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k 10^{-k!} \leq \sum_{k=0}^{+\infty} 9 \cdot 10^{-(n+1)!+k} = 10 \cdot 10^{-(n+1)!} = 10q^{-(n+1)}.$$

Or $\lim_{q\to\infty} \frac{10q^{-(n+1)}}{Cq^{-r}} = 0$, donc $|x-\frac{p}{q}| \leq Cq^{-r}$ pour tout n suffisamment grand : x est bien de Liouville, et donc transcendant. □

6.3 Dénominateurs d'approximations rationnelles d'irrationnels

Théorème 6.
Soit x un réel irrationnel. Soit $(p_n/q_n)_{n\geq 0}$ une suite de nombres rationnels convergeant vers x, où $p_n \in \mathbb{Z}$ et $q_n \geq 1$. Alors $\lim_{n\to+\infty} q_n = +\infty$.

Démonstration.
Soit $M \geq 1$.On veut montrer que $q_n > M$ pour tout n suffisamment grand.

Soit $r \in \{1,\dots,\lfloor M \rfloor\}$. L'intervalle $[x-1, x+1]$ contient au plus $2r+1$ points de $(1/r)\mathbb{Z}$. Par conséquent, l'ensemble $A := [x-1,x+1] \cap \bigcup_{r=1}^{\lfloor M \rfloor} (1/r)\mathbb{Z}$ est fini. Comme x est irrationnel, il n'appartient pas à cet ensemble. Soit $\varepsilon := \min_{y\in A} |x-y| > 0$.

Par convergence, pour tout n suffisamment grand, $|x-p_n/q_n| < \varepsilon$ et $|x-p_n/q_n| < 1$. Cela implique que $p_n/q_n \in [x-1, x+1]$ et $p_n/q_n \notin A$, donc $p_n/q_n \notin (1/r)\mathbb{Z}$ pour tout $r \leq M$. En particulier, $q_n > M$ pour tout n suffisamment grand. □

Exercice 6.6.
On peut aussi procéder par l'absurde. En supposant que (q_n) ne tend pas vers $+\infty$, mntrez que l'on peut extraire une sous-suite strictement croissante (n_k) telle que p_{n_k}, q_{n_k} soient constants. Déduisez-en que x est rationnel.

7 Références

[FGN·Alg1] : *Oraux X-ENS. Algèbre 1.* S. Francinou, H. Gianella, S. Nicolas.
[Moi] : *Mathématiques supérieures, Analyse.* J. Moisan, F. Chanet, F. Delmas, N. Tosel.

[Ska] : *Analyse*. G. Skandalis.

La présentation, en l'absence d'autre mention, est tirée de **[Ska, Chapitre I]**. La plupart des propositions sont reprises dans **[FGN·Alg1]** et **[FGN·Ana1]**, mais la structure d'une suite d'exercices, bien qu'idéale pour des développements, manque de cohérence pour concevoir la leçon elle-même.