École universitaire Paris-Saclay
Année universitaire 2023/2024

Licence de mathématiques
MEU 302 Algèbre

Corrigé de l'examen partiel du 27 octobre 2023

Exercice I (Question de cours)

Soit $f\colon E \to E$ un endomorphisme d'un espace vectoriel réel de dimension finie. Que signifie l'énoncé « f est diagonalisable » ?

(Il n'est pas attendu que vous écriviez la définition avec des symboles mathématiques comme $\forall$, $\exists$, … ; un énoncé en français, mais rigoureux, suffit.)

> L'endomorphisme f est diagonalisable si et seulement s'il existe une base $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de f formés de vecteurs propres, c'est-à-dire que pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, il existe $\lambda_i \in \mathbf{R}$ tel que $f(e_i) = \lambda_i e_i$.

Exercice II (Vrai ou faux)

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse, et suivant le cas, en donner une brève démonstration ou produire un contre-exemple.

(1) Toute symétrie vectorielle est un isomorphisme.

> Vrai. Si s est une symétrie d'un espace vectoriel E, alors $s \circ s = \mathrm{Id}_E$, ce qui montre que s est inversible et est son proper inverse (on dit que s est une involution), donc s est un isomorphisme.

(2) Tout endomorphisme nilpotent est diagonalisable.

> Faux. Si f est un endomorphisme nilpotent, sa seule valeur propre est 0, donc si f est diagonalisable, on doit avoir $f = 0$. Tout endormorphisme nilpotent non nul est un contre-exemple : on peut par exemple prendre l'endomorphisme associé à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(3) Si deux matrices sont équivalentes, alors elles sont semblables.

> Faux. On peut trouver deux matrices non semblables qui sont équivalentes. Par exemple, dans les matrices carrées de taille 2, la matrice identité et la matrice diagonale ayant pour coefficients diagonaux 1 et -1 sont équivalentes (puisque toutes les deux de rang 2), mais non semblables, puisqu'elles sont toutes les deux diagonalisables, mais n'ont pas les mêmes valeurs propres.

(4) Si f est diagonalisable, alors les espaces propres de f sont tous de dimension 1.

> Faux. L'identité de $\mathbf{R}^2$ est diagonalisable et l'espace propre associé à la valeur propre 1 est de dimension 2.

(5) Il existe deux plans vectoriels $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ dans $\mathbf{R}^3$ tels que $\mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2$ soit un singleton.

Faux. Plus généralement, on sait bien que l'intersection de deux plans *affines* de $\mathbf{R}^3$ est soit un plan (si les deux plans sont égaux), soit une droite, soit vide (si les deux plans sont parallèles et distincts ; cas qui est impossible pour des plans vectoriels).

(Alternativement, de façon plus algébrique, le plan vectoriel $\mathscr{P}_1$ est le noyau d'une forme linéaire $\varphi\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$. Notons $\psi : \mathscr{P}_2 \to \mathbf{R}$ la restriction de φ à $\mathscr{P}_2$. L'intersection $\mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2$ est le noyau de ψ. La dimension du noyau de ψ est égale à $\dim \mathscr{P}_2 - \dim \operatorname{Im} f = 2 - \dim \operatorname{Im} f$ d'après le théorème du rang. Comme $\dim \operatorname{Im} f \in \{0, 1\}$, la dimension de $\mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2$ vaut 1 ou 2 : elle est donc différente de 0.)

Exercice III

Déterminer une équation cartésienne du plan vectoriel dans $\mathbf{R}^3$ engendré par les vecteurs $f_1 = (4, 1, 2)$ et $f_2 = (1, -5, -3)$.

(Notons qu'il est évident que f_1 et f_2 ne sont pas colinéaires, donc ils engendrent bien un plan vectoriel.)

Un vecteur $u = (x, y, z)$ appartient à $\mathrm{Vect}(f_1, f_2)$ si et seulement si le déterminant $\det(f_1, f_2, u) = 0$. En calculant ce déterminant de vecteurs, nous obtiendrons l'équation cartésienne voulue :

$$\det(f_1, f_2, u) = \begin{vmatrix} 4 & 1 & x \\ 1 & -5 & y \\ 2 & -3 & z \end{vmatrix}$$

Il est recommandable de développer ce déterminant selon la dernière colonne :

$$\begin{aligned} \det(f_1, f_2, u) &= \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} \cdot x - \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} \cdot y + \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} \cdot z \\ &= 7x + 14y - 21z = 7 \cdot (x + 2y - 3z) \end{aligned}$$

Le plan vectoriel engendré par les vecteurs f_1 et f_2 admet $x + 2y - 3z = 0$ comme équation cartésienne.

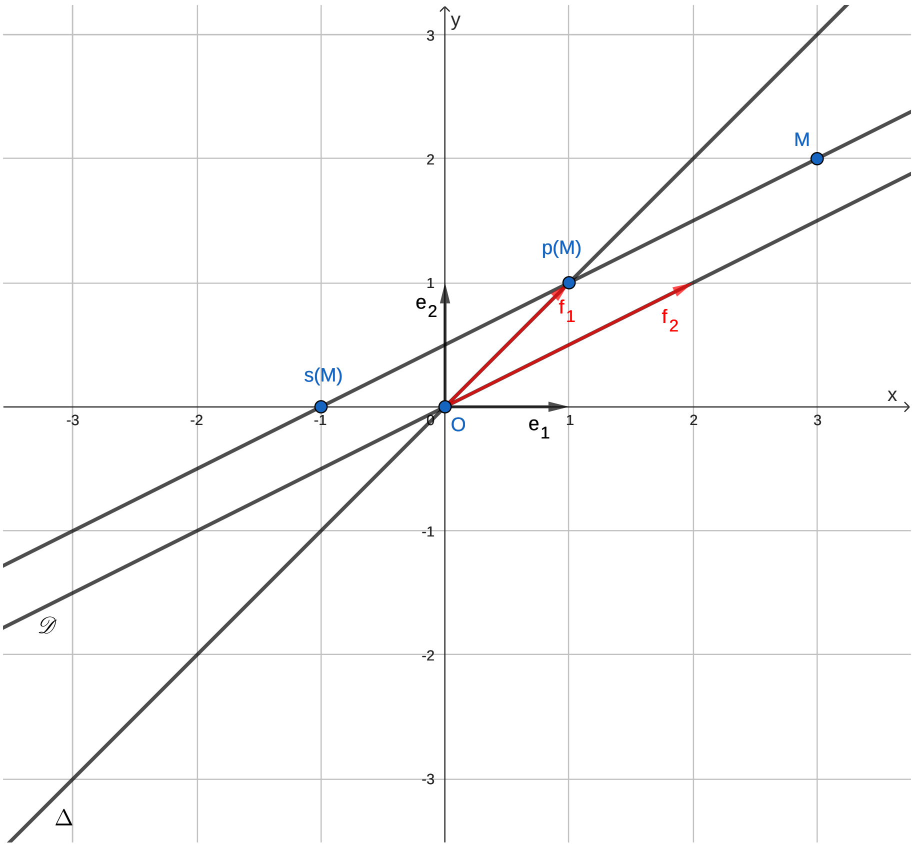
(Alternativement, on peut déterminer les triplets $(a, b, c) \in \mathbf{R}^3$ tels que f_1 et f_2 soient solutions de l'équation $ax + by + cz = 0$, ce qui conduit à résoudre un système linéaire homogène de deux équations en trois variables (a, b, c). Une solution non triviale à ce système d'équations fournit l'équation voulue.)

Exercice IV

Dans $\mathbf{R}^2$, on considère les vecteurs $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$, $f_1 = (1, 1)$, $f_2 = (2, 1)$. On note Δ la droite vectorielle $\mathrm{Vect}(f_1)$ et $\mathscr{D}$ la droite vectorielle $\mathrm{Vect}(f_2)$.

On note $p : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ la projection vectorielle sur Δ parallèlement à $\mathscr{D}$ et $s : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ la symétrie vectorielle d'axe Δ parallèlement à $\mathscr{D}$.

(1) Faire une figure sur laquelle vous représenterez les axes, les vecteurs e_1, e_2, f_1, f_2, les droites Δ et $\mathscr{D}$, le point $M = (3, 2)$, ainsi que $p(M)$ et $s(M)$.



(2) Déterminer $p(f_1)$, $p(f_2)$, $s(f_1)$, $s(f_2)$.

Comme f_1 appartient à l'axe Δ, on a $p(f_1) = f_1$ et $s(f_1) = f_1$. Le vecteur f_2 appartient à la droite vectorielle $\mathscr{D}$, donc $p(f_2) = 0$, et $s(f_2) = -f_2$.

(3) Les endomorphismes p et s sont-ils diagonalisables ? Si oui, donnez leurs valeurs propres.

Les vecteurs (f_1, f_2) formant une base, la question précédente montre que ce sont des vecteurs propres à la fois pour p et s, qui sont donc diagonalisables. Les valeurs propres (simples) de p sont 1 et 0 et celles de s sont 1 et -1.

(Les deux questions suivantes *peuvent* être traitées indépendamment des questions précédentes.)
(4) Calculer $p(e_1)$, $s(e_1)$, $p(e_2)$, $s(e_2)$. On pourra s'aider de la figure (auquel cas, pour éviter de la surcharger, refaire une figure avec les droites Δ, $\mathscr{D}$ et les points pertinents pour cette question), ou bien procéder de façon plus algébrique.

Procédons de façon algébrique. On remarque que $e_1 = f_2 - f_1$, donc $p(e_1) = p(f_2) - p(f_1) = -f_1 = (-1, -1)$ et $s(e_1) = s(f_2) - s(f_1) = -f_2 - f_1 = (-3, -2)$.

Pour le vecteur e_2, on peut utiliser la relation $e_2 = f_1 - e_1$, et donc $p(e_2) = p(f_1) - p(e_1) = f_1 - p(e_1) = (1, 1) - (-1, -1) = (2, 2)$. De même, $s(e_2) = s(f_1) - s(e_1) = f_1 - s(e_1) = (1, 1) - (-3, -2) = (4, 3)$.

(5) Déterminer les matrices respectives P et S des endomorphismes p et s dans la base canonique (e_1, e_2).

Les résultats obtenus à la question précédente montrent que :

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad S = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

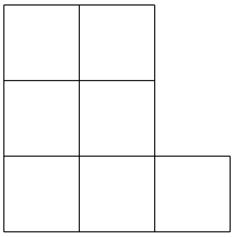
On note $F := \left(\begin{array}{c|c} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{array} \right) \in M_2(\mathbf{R})$.

(6) Sans trop faire de calculs, déterminer les coefficients des matrices $F^{-1}PF$ et $F^{-1}SF$.

On remarque que les vecteurs-colonnes F correspondent aux vecteurs f_1 et f_2. Déterminer $F^{-1}SF$ et $F^{-1}PF$ revient à déterminer les matrices de s et p dans la base (f_1, f_2), ce qui a essentiellement été fait à la question (2), donc :

$$F^{-1}PF = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad F^{-1}SF = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice V



On suppose que f est un endomorphisme nilpotent d'un espace vectoriel réel E dont le tableau de Young associé est le tableau ci-dessus.

(1) Déterminer $\dim E$. (Pour cette question comme pour les suivantes, ne pas oublier de dire comment vous obtenez votre résultat.)

Le nombre de cases dans le tableau est 7, donc $\dim E = 7$.

(2) Déterminer $\dim \ker(f)$.

Le nombre de cases sur la dernière ligne est 3, donc $\dim \ker f = 3$.

(3) Déterminer $\dim \ker(f^2)$.

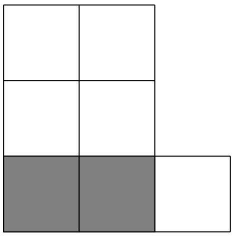
Le nombre total de cases sur les deux dernières lignes est 5, donc $\dim \ker(f^2) = 5$.

(4) Quel est le plus petit entier naturel r tel que $f^r = 0$.

Le tableau possède 3 lignes, donc l'indice de nilpotente r est égal à 3.

(5) Déterminer $\dim(\operatorname{Im} f \cap \ker f)$.

$\operatorname{Im} f \cap \ker f$ admet pour base les vecteurs qui correspondent aux cases qui vérifie simultanément la condition qu'il existe une case au-dessus (appartenance à $\operatorname{Im} f$) et qui sont sur la dernière ligne (appartenance à $\ker f$). Ce sont les deux cases grisées ci-dessous :



On en déduit que $\dim(\operatorname{Im} f \cap \ker f) = 2$.

(6) Déterminer la matrice de Jordan de f.

Le tableau possède trois colonnes, donc la matrice de Jordan de f est formée de trois blocs de Jordan, qui ont pour dimensions successives 3, 3 et 1.

Si on note $J_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, la matrice de Jordan de f admet la description diagonale par blocs suivante (où le bloc tout en bas à droite est de taille 1) :

$$\begin{pmatrix} J & 0 & 0 \\ 0 & J & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Autrement dit, la matrice de Jordan de f est :

$$\left(\begin{array}{ccc|cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

(7) Montrer qu'il existe un autre endomorphisme nilpotent $g : E \to E$ tel que g et f ne soient pas semblables.

Il suffit de considérer un g nilpotent qui ait un autre tableau de Young que f. On peut par exemple prendre $g = 0$, dont avec le tableau de Young possède une seule ligne à 7 cases.

Exercice VI

On considère la matrice M suivante :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Notons $f\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'endomorphisme dont la matrice dans la base canonique est M. Notons $g := f - \mathrm{id}$.

(1) Quelles sont les valeurs propres de M ?

La matrice M étant triangulaire inférieure, les valeurs propres de M sont les coefficients diagonaux de M. Ainsi, 1 est la seule valeur propre (triple) de M.

(2) La matrice M est-elle diagonalisable ?

La matrice M n'est pas diagonalisable. En effet, si elle l'était, elle serait semblable à la matrice identité, donc égale à la matrice identité, ce qui est absurde.

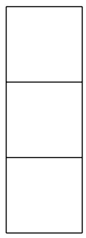
(3) Montrer que $M - I_3$ est une matrice nilpotente.

$$M - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice $M - I_3$ est « strictement triangulaire inférieure », c'est-à-dire triangulaire inférieure avec des zéros sur la diagonale. On en déduit que $M - I_3$ est nilpotente.

(4) Déterminer le tableau de Young de $M - I_3$.

Il est évident que $M - I_3$ est de rang 2, donc la dimension du noyau de $M - I_3$ est nécessairement 1. Sur le tableau de Young cherché, la dernière ligne contient donc une seule case. Comme $M - I_3$ est de taille 3, la seule possibilité est manifestement :



(5) Déterminer explicitement *un* vecteur u tel que $g(g(u)) \neq 0$. Calculer $v := g(u)$ et $w := g(v)$.

Notons $u := (1, 0, 0)$ le premier vecteur de la base canonique. Calculons $v := g(u) = (0, 2, 3)$ et $w := g(g(u)) = g(v)$.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Comme le vecteur $w = g(g(u))$ calculé ici est non nul, on obtient que $u = (1, 0, 0)$ convient.

(6) Montrer que $\mathscr{B} := (u, v, w)$ est une base de $\mathbf{R}^3$.

Calculons par exemple le déterminant de ces vecteurs :

$$\det(u, v, w) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 8 \neq 0$$

Par conséquent, $\mathscr{B}$ est bien une base de $\mathbf{R}^3$.

(Plus abstraitement, il suffit de montrer que $\mathscr{B}$ est une famille libre. Observons d'abord que $g(u) = v$, $g(v) = w$ et $g(w) = 0$. Si $\alpha u + \beta v + \gamma w = 0$, en appliquant g, on obtient $\alpha v + \beta w = 0$ et en réappliquant g, on obtient encore $\alpha w = 0$. Comme w est non nul, on obtient $\alpha = 0$, mézalor $\beta w = 0$, et donc $\beta = 0$, puis $\gamma w = 0$, donc $\gamma = 0$.)

(7) Quelle est la matrice de g dans la base $\mathscr{B}$.

> La matrice de g dans la base $\mathscr{B}$ est :
>
> $$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(8) Quelle est la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$.

> Comme $f = \mathrm{Id} + g$, la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$ est :
>
> $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(9) Déterminer explicitement une matrice inversible $P \in M_3(\mathbf{R})$ telle que

$$P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

> D'après les résultats aux questions précédentes, la matrice suivante convient :
>
> $$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$