École universitaire Paris-Saclay — Licence de mathématiques
Année universitaire 2023/2024 — MEU 302 Algèbre

Examen partiel du 27 octobre 2023 – durée : trois heures

Documents et calculatrices interdits.

La note tiendra compte du soin et de la qualité de l'expression écrite. Les réponses non argumentées ne rapportent aucun point. Tous les exercices sont indépendants.

Exercice I (Question de cours)

Soit $f\colon E \to E$ un endomorphisme d'un espace vectoriel réel de dimension finie. Que signifie l'énoncé « f est diagonalisable » ?

(Il n'est pas attendu que vous écriviez la définition avec des symboles mathématiques comme $\forall$, $\exists$, ... ; un énoncé en français, mais rigoureux, suffit.)

Exercice II (Vrai ou faux)

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse, et suivant le cas, en donner une brève démonstration ou produire un contre-exemple.

(1) Toute symétrie vectorielle est un isomorphisme.
(2) Tout endomorphisme nilpotent est diagonalisable.
(3) Si deux matrices sont équivalentes, alors elles sont semblables.
(4) Si f est diagonalisable, alors les espaces propres de f sont tous de dimension 1.
(5) Il existe deux plans vectoriels $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ dans $\mathbf{R}^3$ tels que $\mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2$ soit un singleton.

Exercice III

Déterminer une équation cartésienne du plan vectoriel dans $\mathbf{R}^3$ engendré par les vecteurs $f_1 = (4, 1, 2)$ et $f_2 = (1, -5, -3)$.

Exercice IV

Dans $\mathbf{R}^2$, on considère les vecteurs $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$, $f_1 = (1, 1)$, $f_2 = (2, 1)$. On note Δ la droite vectorielle $\mathrm{Vect}(f_1)$ et $\mathscr{D}$ la droite vectorielle $\mathrm{Vect}(f_2)$.

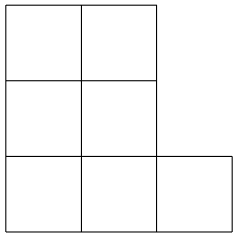
On note $p : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ la projection vectorielle sur Δ parallèlement à $\mathscr{D}$ et $s : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ la symétrie vectorielle d'axe Δ parallèlement à $\mathscr{D}$.

(1) Faire une figure sur laquelle vous représenterez les axes, les vecteurs e_1, e_2, f_1, f_2, les droites Δ et $\mathscr{D}$, le point $M = (3, 2)$, ainsi que $p(M)$ et $s(M)$.
(2) Déterminer $p(f_1)$, $p(f_2)$, $s(f_1)$, $s(f_2)$.
(3) Les endomorphismes p et s sont-ils diagonalisables ? Si oui, donnez leurs valeurs propres.
(Les deux questions suivantes *peuvent* être traitées indépendamment des questions précédentes.)
(4) Calculer $p(e_1)$, $s(e_1)$, $p(e_2)$, $s(e_2)$. On pourra s'aider de la figure (auquel cas, pour éviter de la surcharger, refaire une figure avec les droites Δ, $\mathscr{D}$ et les points pertinents pour cette question), ou bien procéder de façon plus algébrique.
(5) Déterminer les matrices respectives P et S des endomorphismes p et s dans la base canonique (e_1, e_2).

On note $F := \left(\begin{array}{c|c} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{array}\right) \in M_2(\mathbf{R})$.

(6) Sans trop faire de calculs, déterminer les coefficients des matrices $F^{-1}PF$ et $F^{-1}SF$.

Exercice V



On suppose que f est un endomorphisme nilpotent d'un espace vectoriel réel E dont le tableau de Young associé est le tableau ci-dessus.
(1) Déterminer $\dim E$. (Pour cette question comme pour les suivantes, ne pas oublier de dire comment vous obtenez votre résultat.)
(2) Déterminer $\dim \ker(f)$.
(3) Déterminer $\dim \ker(f^2)$.
(4) Quel est le plus petit entier naturel r tel que $f^r = 0$.
(5) Déterminer $\dim(\operatorname{Im} f \cap \ker f)$.
(6) Déterminer la matrice de Jordan de f.
(7) Montrer qu'il existe un autre endomorphisme nilpotent $g : E \to E$ tel que g et f ne soient pas semblables.

Exercice VI

On considère la matrice M suivante :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Notons $f\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'endomorphisme dont la matrice dans la base canonique est M. Notons $g := f - \mathrm{id}$.

(1) Quelles sont les valeurs propres de M ?
(2) La matrice M est-elle diagonalisable ?
(3) Montrer que $M - I_3$ est une matrice nilpotente.
(4) Déterminer le tableau de Young de $M - I_3$.
(5) Déterminer explicitement *un* vecteur u tel que $g(g(u)) \neq 0$. Calculer $v := g(u)$ et $w := g(v)$.
(6) Montrer que $\mathscr{B} := (u, v, w)$ est une base de $\mathbf{R}^3$.
(7) Quelle est la matrice de g dans la base $\mathscr{B}$.
(8) Quelle est la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$.
(9) Déterminer explicitement une matrice inversible $P \in M_3(\mathbf{R})$ telle que

$$P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$