

**Interrogation 2 : Classes de similitudes, espaces euclidiens**

Durée : 30 minutes - 4 questions.

Le 17 octobre 2023

**Question 1.** On fixe un espace vectoriel  $E$ . Reformulez la phrase suivante en utilisant un formalisme mathématique : “Une symétrie n’est jamais nilpotente.”

.....  
.....  
.....  
.....

**Question 2.** On se place dans un espace vectoriel  $E$  de dimension finie. Répondez par vrai ou faux et argumentez par une démonstration ou un contre-exemple.

1. Les valeurs propres sont des invariants de similitude.

.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....

2. Il existe un endomorphisme préservant la norme qui n’est pas inversible.

.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....

**Question 3.** Dans  $\mathbb{R}^3$ , soit  $\Delta$  la droite d'équations  $x + 2y + 5z = x - 3y + 9z = 0$ .

1. Faites dans l'espace à droite un schéma des objets géométriques en jeu : droite, plans, vecteurs normaux.
2. Donnez une représentation paramétrique de  $\Delta$ .

.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....

**Question 4.** Soient  $E$  un espace vectoriel et  $f \in L(E)$ .

1. Soit  $v \in \text{Ker}(f^3)$  tel que  $f^2(v) \neq 0$ . Montrez que  $(v, f(v), f^2(v))$  est libre.

.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....

2. En supposant que  $\dim(E) = 3$ , écrivez la matrice de  $f$  dans cette base. Quelle est la nature de  $f$  ?

.....  
.....  
.....  
.....

3. En supposant que  $\dim(E) = 5$  et que  $\dim(\text{Ker}(f)) = 3$ , quels sont les tableaux de Young possibles associés à  $f$  ?

.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....