MEU203-Algèbre
L3MATH

Université Paris Saclay
2023-2024

Examen – Corrigé
Le 19 décembre 2023

1 Questions de cours

Question 1.
Soit E un espace vectoriel. On note Bil(E) l'ensemble des formes bilinéaires sur E. Reformulez la phrase suivante en utilisant un formalisme mathématique.
"On peut trouver une forme bilinéaire symétrique mais pas antisymétrique sur E."
Vous ferez attention aux quantificateurs. Les notions de "symétrie" et "antisymétrie" devront être explicitées.

Par exemple :

$$\exists \varphi \in \mathrm{Bil}(E),\ (\forall \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in E,\ \varphi(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = \varphi(\overrightarrow{y}, \overrightarrow{x})) \wedge (\exists \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in E,\ \varphi(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) \neq -\varphi(\overrightarrow{y}, \overrightarrow{x}))$$

Question 2.
Répondez par vrai ou faux et argumentez à l'aide d'une démonstration ou un contre-exemple.

1. **L'ensemble $\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 :\ x + 2y + 3t = 2,\ 5x - 3z - t = 1\}$ est une droite affine de $\mathbb{R}^4$.**

   FAUX. Cet ensemble est l'intersection des deux hyperplans affines $E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 :\ x + 2y + 3t = 2\}$ et $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 :\ 5x - 3z - t = 1\}$. Donc ou bien $E \cap F$ est vide, ou bien $E \cap F$ est un sous-espace affine tel que

   $$\begin{aligned} \mathrm{codim}(E \cap F) &\leq \mathrm{codim}(E) + \mathrm{codim}(F) \\ 4 - \dim(E \cap F) &\leq 1 + 1 \\ \dim(E \cap F) &\geq 4 - 2 = 2. \end{aligned}$$

   Donc ou bien $E \cap F$ est vide, ou bien de dimension au moins 2. Dans aucun de ces deux cas $E \cap F$ ne peut être une droite affine.

2. **Il existe deux symétries affines dont la composée est une translation.**

   VRAI. Il suffit de prendre deux symétries s_1, s_2 qui ont la même même partie linéaire, par exemple deux symétries axiales du plan dont les axes sont parallèles. Alors $\overrightarrow{s_1 \circ s_2} = \overrightarrow{s_1} \circ \overrightarrow{s_2} = \overrightarrow{s_1}^2 = \overrightarrow{\mathrm{id}}$, car la partie linéaire d'une symétrie affine est une symétrie vectorielle. Or une transformation affine dont la partie linéaire est l'identité est une translation, donc $s_1 \circ s_2$ est une translation.
   Remarque : On peut même choisir $s_1 = s_2$, auquel cas $s_1 \circ s_2 = \mathrm{id}$, qui est bien une translation.

3. **Les symétries affines préservent les directions des sous-espaces affines.**
   FAUX. On se place dans $\mathbb{R}^2$. Soit s la symétrie axiale dont l'axe est l'axe des abscisses $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}$. Soit Δ la droite d'équation $y = x$. Alors $s(\Delta)$ est la droite d'équation $y = -x$, qui n'a pas la même direction que Δ.

4. **Si ℓ_1, ℓ_2 : $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sont deux formes linéaires sur $\mathbb{R}^2$, alors $q : \overrightarrow{u} \mapsto \ell_1(\overrightarrow{u})\ell_2(\overrightarrow{u})$ est une forme quadratique de rang au plus 1.**
   FAUX. On choisit les formes linéaires $\ell_1(x, y) = x$ et $\ell_2(x, y) = y$. Alors

   $$q(x, y) = xy = \left(\frac{x + y}{2}\right)^2 - \left(\frac{x - y}{2}\right)^2,$$

   qui est de rang 2.
   Remarque : q est la forme quadratique associée à la forme linéaire $\varphi_1(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \ell_1(\overrightarrow{u})\ell_2(\overrightarrow{u})$, donc la matrice associée est de rang 1. Cependant, la forme bilinéaire *symétrique* associée à q est $\varphi_2(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \frac{\ell_1(\overrightarrow{u})\ell_2(\overrightarrow{u})}{2} + \frac{\ell_2(\overrightarrow{u})\ell_1(\overrightarrow{u})}{2}$, qui est de rang 2 dès que ℓ_1 et ℓ_2 sont linéairement indépendantes.

5. **Le cône isotrope de $q(x,y) = 3x^2 - y^2$ est un sous-espace affine.**
FAUX. Ce cône isotrope est

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_0 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 3x^2 - y^2 = 0\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ (\sqrt{3}x + y)(\sqrt{3}x - y) = 0\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ \sqrt{3}x + y = 0\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ \sqrt{3}x - y = 0\}.\end{aligned}$$

Ainsi, $\mathcal{C}_0$ est l'union de deux droites distinctes. Choisissons par exemple les points $A(1, \sqrt{3})$ et $B(1, -\sqrt{3})$. Alors A et B appartiennent à $\mathcal{C}_0$, mais leur milieu $C(1,0)$ n'y appartient pas (car $3 \cdot 1^2 - 0^2 \neq 0$). Or, si deux points apaprtiennent à un sous-espace affine, alors leur milieu aussi ; donc $\mathcal{C}_0$ n'est pas un sous-espace affine.

Question 3. Soient E et F des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels euclidiens et $f \in L(E,F)$. Pour tout $\overrightarrow{u} \in E$, on note $q(\overrightarrow{u}) := \|f(\overrightarrow{u})\|^2$.

1. **Montrez que q est une forme quadratique positive sur E, et précisez la forme bilinéaire associée.**
Posons $\varphi(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) := \langle f(\overrightarrow{u}), f(\overrightarrow{v})\rangle$ pour tous $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v} \in E$. Alors φ est linéaire à droite :

$$\begin{aligned}\varphi(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v_1} + \lambda\overrightarrow{v_2}) &= \langle f(\overrightarrow{u}), f(\overrightarrow{v_1} + \lambda\overrightarrow{v_2})\rangle \\ &= \langle f(\overrightarrow{u}), f(\overrightarrow{v_1}) + \lambda f(\overrightarrow{v_2})\rangle \\ &= \langle f(\overrightarrow{u}), f(\overrightarrow{v_1})\rangle + \lambda\langle f(\overrightarrow{u}), f(\overrightarrow{v_2})\rangle \\ &= \varphi(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v_1}) + \lambda\varphi(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v_2}),\end{aligned}$$

pour tous $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2} \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. De même, φ est linéaire à gauche, donc bilinéaire. Enfin, φ est symétrique :

$$\varphi(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \langle f(\overrightarrow{u}), f(\overrightarrow{v})\rangle = \langle f(\overrightarrow{v}), f(\overrightarrow{u})\rangle = \varphi(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}),$$

pour tous $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v} \in E$.
Enfin, $q(\overrightarrow{u}) = \langle f(\overrightarrow{u}), f(\overrightarrow{u})\rangle = \varphi(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u})$ pour tout $\overrightarrow{u} \in E$, donc q est bien une forme quadratique et φ est sa forme bilinéaire symétrique associée.
Finalement, q est positive car la norme est réelle.

2. **On suppose de plus que f est injective. Montrez que q est définie positive. Quelle est sa signature ?**
On sait que q est une forme quadratique positive. Il suffit donc de montrer que, pour tout $\overrightarrow{u} \in E$, si $q(\overrightarrow{u}) = 0$, alors $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0_E}$. Soit $\overrightarrow{u} \in E$ tel que $q(\overrightarrow{u}) = 0$. Alors $\|f(\overrightarrow{u})\|^2 = 0$, donc $\|f(\overrightarrow{u})\| = 0$, donc $f(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{0_F}$. Or f est injective, donc $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0_E}$.

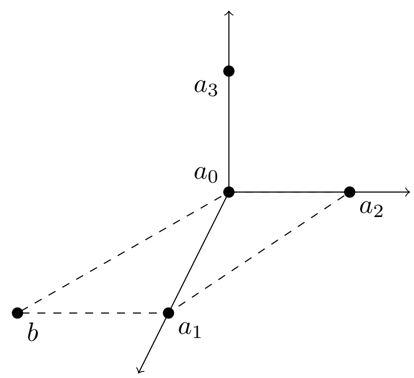
Comme q est définie positive sur E, sa signature est $(\dim(E), 0)$.

2 Exercices

Exercice 1.

Soit $\mathcal{R} = (a_0, a_1, a_2, a_3)$ un repère de $\mathbb{R}^3$. Soit b le point tel que (a_0, a_2, a_1, b) soit un parallélogramme, i.e. tel que $\overrightarrow{a_1 b} = \overrightarrow{a_2 a_0}$. On note f l'application affine telle que :

$$\begin{aligned}f(a_0) &= a_2, & f(a_1) &= b, \\ f(a_2) &= a_0, & f(a_3) &= a_3.\end{aligned}$$



1. **Justifiez que l'application f existe et est unique.**
Une transformation affine est déterminée par son action sur un repère. Autrement dit, étant donné un repère $\mathcal{R} = (a_0, a_1, a_2, a_3)$ de $\mathbb{R}^3$ et 4 points (b_0, b_1, b_2, b_3) de $\mathbb{R}^3$, il existe une unique transformation affine qui envoie a_i sur b_i pour tout i.
2. **Montrez que (a_0, b, a_2, a_3) est un repère. L'application f est-elle bijective ?**

On sait que a_0, a_2, a_3 appartiennent à $\mathrm{Aff}(a_0, b, a_2, a_3)$. De plus, par définition d'un parallélogramme, $\overrightarrow{a_1 b} = \overrightarrow{a_2 a_0}$, donc $a_1 = b + \overrightarrow{b a_1} = b + \overrightarrow{a_0 a_2}$, donc $a_1 \in \mathrm{Aff}(a_0, b, a_2) \subset \mathrm{Aff}(a_0, b, a_2, a_3)$.

Par conséquent, $\mathcal{R} \subset \mathrm{Aff}(a_0, b, a_2, a_3)$, donc $\mathrm{Aff}(\mathcal{R}) = \mathbb{R}^3 \subset \mathrm{Aff}(a_0, b, a_2, a_3)$. Donc (a_0, b, a_2, a_3) engendre affinement tout l'espace. Par cardinalité, (a_0, b, a_2, a_3) est un repère de $\mathbb{R}^3$.

Remarque : On peut aussi travailler avec les vecteurs. $(\overrightarrow{a_0 a_1}, \overrightarrow{a_0 a_2}, \overrightarrow{a_0 a_3})$ est une base de $\overrightarrow{\mathbb{R}^3}$, donc $(\overrightarrow{a_0 b}, \overrightarrow{a_0 a_2}, \overrightarrow{a_0 a_3}) = (\overrightarrow{a_0 a_1} - \overrightarrow{a_0 a_2}, \overrightarrow{a_0 a_2}, \overrightarrow{a_0 a_3})$ aussi, donc (a_0, b, a_2, a_3) est un repère de $\mathbb{R}^3$.

Remarque : On peut aussi écrire explicitement la transformation f dans le repère $\mathcal{R}$, et remarquer que la matrice représentant sa partie linéaire est inversible, donc que f est bijective.

3. (a) **Montrez que a_3 ainsi que le milieu du segment $[a_0, a_2]$ sont des points fixes de f.**

   $f(a_3) = a_3$ par hypothèse, donc a_3 est un point fixe de f.

   Soit m le milieu du segment $[a_0, a_2]$. Les transformations affines préservent les milieux, donc $f(m)$ est le milieu du segment $[f(a_0), f(a_2)] = [a_2, a_0] = [a_0, a_2]$. Donc $f(m) = m$, et m est un point fixe de f.

   (b) **En admettant le fait que les diagonales du parallélogramme (a_0, a_2, a_1, b) se coupent en leur milieu, montrez que le milieu du segment $[a_0, a_1]$ est un point fixe de f.**

   Soit m' le milieu du segment $[a_0, a_1]$. Comme à la question précédente, $f(m')$ est le milieu du segment $[f(a_0), f(a_1)] = [a_2, b]$. Or les diagonales de (a_0, a_2, a_1, b) se coupent en leur milieu, donc $f(m') = m'$.

   (c) **Quelle est la nature de l'ensemble des points fixes de f ? Donnez-en une représentation paramétrique.**

   Soit F l'ensemble des points fixes de f. Alors F est non vide (il contient a_3), donc est un sous-espace affine de $\mathbb{R}^3$. De plus, F contient a_3, m et m', donc le sous-espace engendré par ces trois points. Or ces trois points sont affinement indépendants (les vecteurs $\overrightarrow{a_3 m}$ et $\overrightarrow{a_3 m'}$ sont linéairement indépendants), donc F contient un plan affine.

   De plus, le point a_0 n'est pas fixe par F, donc $F \neq \mathbb{R}^3$. Donc F est le plan affine engendré par a_3, m et m'. Une représentation paramétrique est

$$F = \{a_3 + s\overrightarrow{a_3 m} + t\overrightarrow{a_3 m'},\ (s,t) \in \mathbb{R}^2\} = \left\{a_3 + \frac{t}{2}\overrightarrow{a_0 a_1} + \frac{s}{2}\overrightarrow{a_0 a_2} - (s+t)\overrightarrow{a_0 a_3},\ (s,t) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

4. (a) **Déterminez le point $f(b)$.**

   On sait que m' est le milieu de $[a_2, b]$, donc $f(m') = m'$ est le milieu de $[f(a_2), f(b)] = [a_0, f(b)]$. Or m' est aussi le milieu de $[a_0, a_1]$, donc $f(b) = a_1$.

   (b) **Déduisez-en la nature de $f \circ f$, puis de f, en précisant ses éléments caractéristiques.**

   $f \circ f$ est une transformation affine, et

$$\begin{aligned} f \circ f(a_0) &= f(a_2) = a_0, & f \circ f(a_1) &= f(b) = a_1, \\ f \circ f(a_2) &= f(a_0) = a_2, & f \circ f(a_3) &= f(a_3) = a_3. \end{aligned}$$

   Donc $f \circ f$ est l'unique application affine qui envoie a_i sur a_i pour $0 \leq i \leq 3$, donc $f \circ f = \mathrm{id}$.

   Par conséquent, f est une symétrie affine. L'ensemble F est son axe. Enfin, sa direction est $\mathrm{Vect}(\overrightarrow{a_0 f(a_0)}) = \mathrm{Vect}(\overrightarrow{a_0 a_2})$, c'est à dire la direction de la droite affine (a_0, a_2).

5. **Déterminez l'expression matricielle associée à f dans le repère $\mathcal{R}$.**

   Soit X les coordonnées d'un point $x \in \mathbb{R}^3$, et Y les coordonnées de $f(x)$. Soit B les coordonnées de $f(a_0)$. Alors

$$\begin{aligned} \overrightarrow{f}(\overrightarrow{a_0 a_1}) &= \overrightarrow{a_2 b} = \overrightarrow{a_0 a_1} - 2\overrightarrow{a_0 a_2} \\ \overrightarrow{f}(\overrightarrow{a_0 a_2}) &= \overrightarrow{a_2 a_0} = -\overrightarrow{a_0 a_2} \\ \overrightarrow{f}(\overrightarrow{a_0 a_3}) &= \overrightarrow{a_2 a_3} = -\overrightarrow{a_0 a_2} + \overrightarrow{a_0 a_3}, \end{aligned}$$

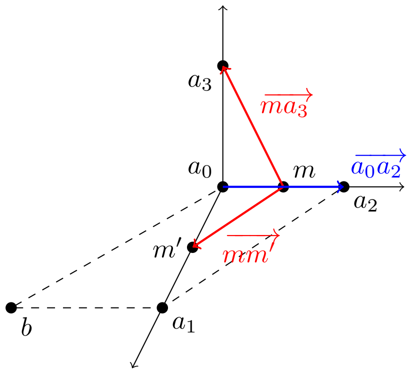
   donc

$$Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

6. **On note A la matrice associée à $\overrightarrow{f}$ dans ce repère. Donner, sans calculs, ses valeurs propres ainsi qu'une base de chacun de ses sous-espaces propres. Recopiez le schéma ci-contre et représentez cette base.**

   A est la matrice d'une symétrie par rapport à un plan vectoriel. Elle a donc pour valeur propre 1 (avec multiplicité 2) et -1 (avec multiplicité 1).

   Le sous-espace propre associé à la valeur propre 1 est $\overrightarrow{F}$, qui a pour base $(\overrightarrow{ma_3}, \overrightarrow{mm'})$. Le sous-espace propre associé à la valeur propre -1 est $\mathrm{Vect}(\overrightarrow{a_0a_2})$, qui est engendré par $\overrightarrow{a_0a_2}$.



7. **Trouvez une matrice $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.**

   Il suffit de choisir pour P la matrice de passage vers une base de vecteurs propres, soit par exemple

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2.

Soit E un espace affine et $f : E \to E$ une application affine. On dit que f est une symétrie centrale si $\overrightarrow{f} = -\overrightarrow{\mathrm{id}}$.

1. **Soit f une symétrie centrale. Soient $x \in E$ et y le milieu du segment $[x, f(x)]$. Montrez que $f(y) = y$.**

$$\begin{aligned} f(y) &= f\left(x + \frac{1}{2}\overrightarrow{xf(x)}\right) \\ &= f(x) + \frac{1}{2}\overrightarrow{f}(\overrightarrow{xf(x)}) \\ &= f(x) - \frac{1}{2}\overrightarrow{xf(x)} \\ &= f(x) + \frac{1}{2}\overrightarrow{f(x)x}, \end{aligned}$$

   donc $f(y)$ est le milieu du segment $[f(x), x]$, donc $f(y) = y$.

2. **Justifiez que f admet un unique point fixe. On appelera ce point fixe le centre de la symétrie centrale f.**

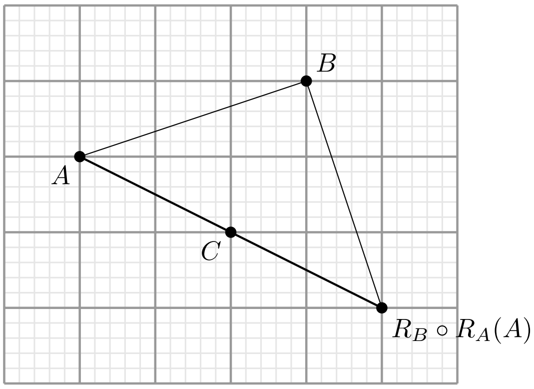
   f admet au moins un point fixe d'après la question précédente. Montrons que ce point fixe est unique. Soient y, y' deux points fixes. Alors

$$\overrightarrow{yy'} = \overrightarrow{f(y)f(y')} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{yy'}) = -\overrightarrow{yy'},$$

   donc $\overrightarrow{yy'} = \overrightarrow{0}$, donc $y = y'$.

   Remarque : On peut aussi utiliser un résultat du cours. 1 n'est pas valeur propre de $\overrightarrow{f} = -\overrightarrow{\mathrm{id}}$, donc f admet un unique point fixe.

3. **Soit A un point. Pourquoi existe-t-il une unique symétrie centrale de centre A ?**
   Une application affine est caractérisée par sa partie linéaire et l'image d'un point. Autrement dit, étant donné $A \in E$, il existe une unique application affine f telle que $f(A) = A$ et $\overrightarrow{f} = -\overrightarrow{\mathrm{id}}$, c'est-à-dire une unique symétrie centrale de centre A.
4. **On se place maintenant dans le plan euclidien. Soit R_A la rotation de centre A et d'angle $+\pi/2$, et R_B la rotation de centre B et d'angle $+\pi/2$. Justifiez que $R_B \circ R_A$ est une symétrie centrale, et construisez son centre sur un dessin.**
   Soit $\overrightarrow{r_{\pi/2}}$ la rotation vectorielle d'angle $\pi/2$. Alors $R_B \circ R_A$ est une transformation affine de partie linéaire $\overrightarrow{R_B \circ R_A} = \overrightarrow{R_B} \circ \overrightarrow{R_A} = \overrightarrow{r_{\pi/2}}^2 = -\overrightarrow{\mathrm{id}}$, donc une symétrie centrale.
   Pour trouver son centre, il suffit de choisir un point x du plan ; le centre C de $R_B \circ R_A$ est alors le milieu du segment $[x, R_B \circ R_A(x)]$. Pour simplifier, nous choisissons ci-dessous le point $x = A$, te telle sorte que $R_B \circ R_A(A) = R_B(A)$.



Exercice 3.

Soit q la forme quadratique de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 9 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$**.**

1. **q est-elle dégénérée ?**
   En notant L_1 les lignes de A, on observe que $L - 1 + L_2 + L_4 = 0$. La matrice A est donc de rang au plus 3, donc q est dégénérée.
2. **Soit $\overrightarrow{u} = (u_1, u_2, u_3, u_4) \in \mathbb{R}^4$. Donnez l'expression de $q(\overrightarrow{u})$.**

$$q(\overrightarrow{u}) = u_1^2 - 2u_1u_2 + u_2^2 + 6u_1u_3 + 9u_3^2 - 6u_3u_4.$$

3. **Réduisez q par la méthode de Gauss, et déduisez-en sa signature. Que peut-on en déduire sur les valeurs propres de A ?**

$$\begin{aligned} q(\overrightarrow{u}) &= u_1^2 - 2u_1u_2 + u_2^2 + 6u_1u_3 + 9u_3^2 - 6u_3u_4 \\ &= (u_1 - u_2 + 3u_3)^2 + 6u_2u_3 - 6u_3u_4 \\ &= (u_1 - u_2 + 3u_3)^2 + 6(u_2 - u_4)u_3 \\ &= (u_1 - u_2 + 3u_3)^2 + 6\left(\frac{u_2 - u_4 + u_3}{2}\right)^2 - 6\left(\frac{u_2 - u_4 - u_3}{2}\right)^2. \end{aligned}$$

   La forme quadratique q est donc de signature $(2, 1)$. La matrice A a donc 2 valeurs propres (avec multiplicité) strictement positives, 0 comme valeur propre simple, et une valeur propre simple strictement négative.

Exercice 4.
Soit $\varphi(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) := u_1v_1 + 4u_1v_2 + 2u_2v_1$ une forme bilinéaire sur $\mathbb{R}^2$, et $q(x, y) = x^2 + 6xy$ la forme quadratique associée.

1. **La forme φ est-elle symétrique ? Antisymétrique ? Vous justifierez votre réponse à l'aide d'une démonstration ou d'un contre-exemple.**
Choisissons par exemple $\overrightarrow{u} = (1, 0)$ et $\overrightarrow{v} = (0, 1)$. Alors

$$\varphi(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = 1 \times 0 + 4 \times 1 \times 1 + 2 \times 0 \times 0 = 4 \ ;$$
$$\varphi(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}) = 0 \times 1 + 4 \times 0 \times 0 + 2 \times 1 \times 1 = 2.$$

Comme $\varphi(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \neq \varphi(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u})$, la forme bilinéaire φ n'est pas symétrique ; et $\varphi(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \neq -\varphi(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u})$, donc elle n'est pas non plus antisymétrique.

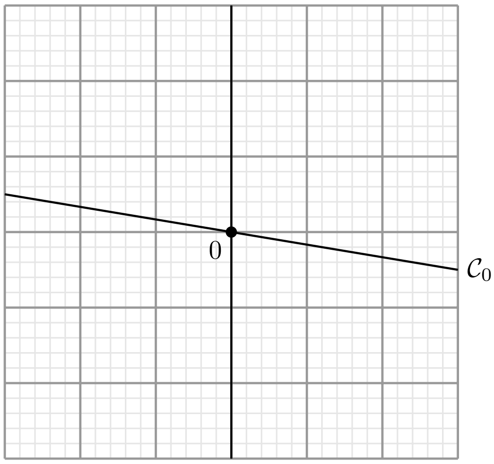
2. **Réduisez q à l'aide de l'algorithme de Gauss. Déduisez-en son cône isotrope, et dessinez-le.**

$$q(x, y) = x^2 + 6xy = (x + 3y)^2 - (3y^2).$$

Soit $\mathcal{C}_0$ le cône isotrope de q. Alors, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

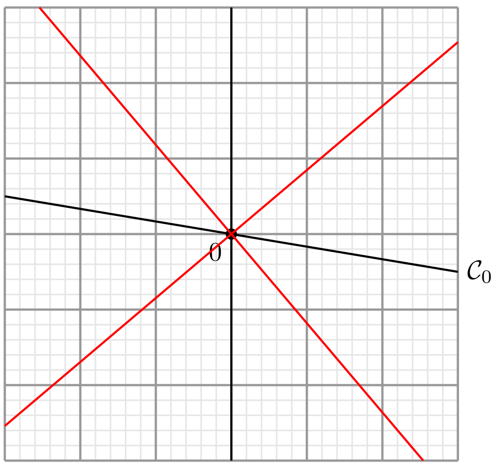
$$\begin{aligned} (x, y) \in \mathcal{C}_0 &\iff (x + 3y)^2 - (3y^2) = 0 \\ &\iff (x + 3y + 3y)(x + 3y - 3y) = 0 \\ &\iff x = 0 \text{ ou } x + 6y = 0. \end{aligned}$$

Ainsi, $\mathcal{C}_0$ est l'union de la droite d'équation $x = 0$ et de la droite d'équation $x + 6y = 0$.



Remarque : Ici, exceptionnellement, la forme factorisée était plus facile à obtenir à partir de la formule initiale qu'à partir de celle obtenue à l'aide de l'algorithme de Gauss.

3. **Soit $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ une base orthonormée dans laquelle la matrice de q est diagonale. Sans faire de calcul, tracez les axes** $\mathrm{Vect}(\overrightarrow{e_1})$ **et** $\mathrm{Vect}(\overrightarrow{e_2})$ **sur la figure précédente.**
Ces deux axes sont des axes de symétries axiales des ensembles de niveau. En particulier, ce sont des axes de symétries de $\mathcal{C}_0$, donc les bissectrices des deux droites d'équation $x = 0$ et $x + 6y = 0$. Ces deux axes sont en rouge ci-dessous.



4. **Toujours sur le même dessin, tracez l'allure de l'ensemble de niveau 1 de q.**

Les droites noires séparent les domaines où q est positive des domaines où q est négative. On observe que $q(1,1) = 7 > 0$, donc q est positive dans les quadrants supérieur droit et inférieur gauche, donc l'ensemble $\mathcal{C}_1$ de niveau 1 de q est dans ces quadrants. Cet ensemble est asymptote au droites noires, et intersecte une des droites rouges orthogonalement. Il suffit enfin de trouver un point appartenant à $\mathcal{C}_1$ pour pouvoir le tracer, par exemple le point $(1, 0)$.

Remarque : Sur cet exemple précis, les ensembles de niveau (autre que 0) sont aussi des graphes de fonctions.