Examen
Le 19 décembre 2023
Durée : 3 heures
Les réponses non argumentées ne rapportent aucun point.
Les calculatrices ne sont pas autorisées.
Un barême très approximatif est indiqué.

1 Questions de cours (8 points)

Question 1. (1 point)
Soit E un espace vectoriel. On note $\mathrm{Bil}(E)$ l'ensemble des formes bilinéaires sur E. Reformulez la phrase suivante en utilisant un formalisme mathématique.
"On peut trouver une forme bilinéaire symétrique mais pas antisymétrique sur E."
Vous ferez attention aux quantificateurs. Les notions de "symétrie" et "antisymétrie" devront être explicitées.

Question 2. (5 points)
Répondez par vrai ou faux et argumentez à l'aide d'une démonstration ou un contre-exemple.

1. L'ensemble $\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 :\ x + 2y + 3t = 2,\ 5x - 3z - t = 1\}$ est une droite affine de $\mathbb{R}^4$.
2. Il existe deux symétries affines dont la composée est une translation.
3. Les symétries affines préservent les directions des sous-espaces affines.
4. Si $\ell_1,\ \ell_2 :\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sont deux formes linéaires sur $\mathbb{R}^2$, alors $q : \overrightarrow{u} \mapsto \ell_1(\overrightarrow{u})\ell_2(\overrightarrow{u})$ est une forme quadratique de rang au plus 1.
5. Le cône isotrope de $q(x, y) = 3x^2 - y^2$ est un sous-espace affine.

Question 3. (2 points) Soient E et F des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels euclidiens et $f \in L(E, F)$. Pour tout $\overrightarrow{u} \in E$, on note $q(\overrightarrow{u}) := \|f(\overrightarrow{u})\|^2$.

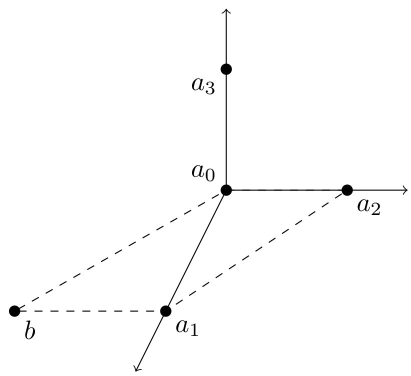
1. Montrez que q est une forme quadratique positive sur E, et précisez la forme bilinéaire associée.
2. On suppose de plus que f est injective. Montrez que q est définie positive. Quelle est sa signature ?

2 Exercices (14 points)

Exercice 1. (6 points)

Soit $\mathcal{R} = (a_0, a_1, a_2, a_3)$ un repère de $\mathbb{R}^3$. Soit b le point tel que (a_0, a_2, a_1, b) soit un parallélogramme, i.e. tel que $\overrightarrow{a_1 b} = \overrightarrow{a_2 a_0}$. On note f l'application affine telle que :

$$f(a_0) = a_2, \qquad f(a_1) = b,$$
$$f(a_2) = a_0, \qquad f(a_3) = a_3.$$

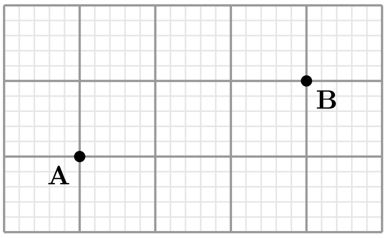


1. Justifiez que l'application f existe et est unique.
2. Montrez que (a_0, b, a_2, a_3) est un repère. L'application f est-elle bijective ?
3. (a) Montrez que a_3 ainsi que le milieu du segment $[a_0, a_2]$ sont des points fixes de f.
   (b) En admettant le fait que les diagonales du parallélogramme (a_0, a_2, a_1, b) se coupent en leur milieu, montrez que le milieu du segment $[a_0, a_1]$ est un point fixe de f.
   (c) Quelle est la nature de l'ensemble des points fixes de f ? Donnez-en une représentation paramétrique.

4. (a) Déterminez le point $f(b)$.
   (b) Déduisez-en la nature de $f \circ f$, puis de f, en précisant ses éléments caractéristiques.
5. Déterminez l'expression matricielle associée à f dans le repère $\mathcal{R}$.
6. On note A la matrice associée à $\overrightarrow{f}$ dans ce repère. Donner, sans calculs, ses valeurs propres ainsi qu'une base de chacun de ses sous-espaces propres. Recopiez le schéma ci-contre et représentez cette base.
7. Trouvez une matrice $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Exercice 2. (3 points)
Soit E un espace affine et $f : E \to E$ une application affine. On dit que f est une **symétrie centrale** si $\overrightarrow{f} = -\overrightarrow{\mathrm{id}}$.

1. Soit f une symétrie centrale. Soient $x \in E$ et y le milieu du segment $[x, f(x)]$. Montrez que $f(y) = y$.
2. Justifiez que f admet un unique point fixe. On appelera ce point fixe le **centre** de la symétrie centrale f.
3. Soit A un point. Pourquoi existe-t-il une unique symétrie centrale de centre A ?
4. On se place maintenant dans le plan euclidien. Soit R_A la rotation de centre A et d'angle $+\pi/2$, et R_B la rotation de centre B et d'angle $+\pi/2$.



Justifiez que $R_B \circ R_A$ est une symétrie centrale, et construisez son centre sur un dessin.

Exercice 3. (2 points)

Soit q la forme quadratique de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 9 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$.

1. q est-elle dégénérée ?
2. Soit $\overrightarrow{u} = (u_1, u_2, u_3, u_4) \in \mathbb{R}^4$. Donnez l'expression de $q(\overrightarrow{u})$.
3. Réduisez q par la méthode de Gauss, et déduisez-en sa signature. Que peut-on en déduire sur les valeurs propres de A ?

Exercice 4. (3 points)
Soit $\varphi(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) := u_1v_1 + 4u_1v_2 + 2u_2v_1$ une forme bilinéaire sur $\mathbb{R}^2$, et $q(x, y) = x^2 + 6xy$ la forme quadratique associée.

1. La forme φ est-elle symétrique ? Antisymétrique ? Vous justifierez votre réponse à l'aide d'une démonstration ou d'un contre-exemple.
2. Réduisez q à l'aide de l'algorithme de Gauss. Déduisez-en son cône isotrope, et dessinez-le.
3. Soit $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ une base orthonormée dans laquelle la matrice de q est diagonale. Sans faire de calcul, tracez les axes $\mathrm{Vect}(\overrightarrow{e_1})$ et $\mathrm{Vect}(\overrightarrow{e_2})$ sur la figure précédente.
4. Toujours sur le même dessin, tracez l'allure de l'ensemble de niveau 1 de q.