Leçon 206 : Théorème des valeurs intermédiaires. Applications. Notes de cours.

Table des matières

Dans toute la leçon, I, J désignent des intervalles réels non réduits à un point.

1 Énoncé

Théorème 1 (Théorème des valeurs intermédiaires)**.**
Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $a < b$ deux réels dans I. Soit c un réel strictement compris entre $f(a)$ et $f(b)$. Alors $c \in f((a,b))$.

Ce théorème se démontre par dichotomie, ou bien à l'aide de la propriété de la borne supérieure. Remarquons cependant que la méthode par dichotomie a l'avantage de pouvoir s'adapter en un algorithme pour trouver numériquement une des solutions de l'équation $f = c$ (voir la partie 3.1 sur les applications en analyse numérique). De plus, la propriété de la borne supérieure se démontre elle aussi par dichotomie.

Démonstration par dichotomie.
On construit un couple de suites adjacentes qui convergent vers un réel $x \in (a,b)$ tel que $f(y) = c$.
- ▷ On pose $a_0 = a$ et $b_0 = b$.
- ▷ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $c_n := \frac{a_n+b_n}{2}$. Si $(f(a_n) - c)(f(c_n) - c) \leq 0$, on pose $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = c_n$; sinon, on pose $a_{n+1} = c_n$ et $b_{n+1} = b_n$.

La suite $(a_n)_{n\geq 0}$ est croissante, la suite $(b_n)_{n\geq 0}$ est décroissante, et $b_n - a_n = (b-a)2^{-n}$. Ces deux suites sont donc adjacentes, et convergent vers la même limite $x \in [a,b]$.

Par continuité de f, on sait que $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n = f(x)$. De plus, par une récurrence simple[1], $(f(a_n) - c)(f(b_n) - c) \leq 0$ pour tout n. En passant à la limite, $(f(x) - c)^2 \leq 0$, donc $f(x) = c$. Finalement, $f(a) \neq c$ et $f(b) \neq c$, donc $x \neq a$ et $x \neq c$, donc $x \in (a,b)$. □

Démonstration par la propriété de la borne supérieure.
Supposons pour simplifier que $f(a) < c < f(b)$. Soit $A := \{x \in [a,b] : \ f(x) \leq c\}$. Alors A est une partie non vide (elle contient a) et bornée (elle est contenue dans $[a,b]$) de $\mathbb{R}$, donc elle admet une bone supérieure x. Par continuité, $f < c$ sur un voisinage de a, donc A contient un voisinage de a, donc $x > a$. De même, par continuité, $f > c$ sur un voisinage de b, donc $x < b$. Finalement, $x \in (a,b)$.

Comme $f(y) > c$ pour tout $y > x$, par passage à la limite en x^+, on sait que $f(x) \geq c$. De même, pour tout $\varepsilon > 0$, on sait que $A \cap (x-\varepsilon, x]$ est non vide, donc il existe une suite de points de A convergeant vers x par valeurs inférieures, et par passage à la limite $f(x) \leq c$. Finalement, $f(x) = c$. □

Le théorème des valeurs intermédiaires est équivalent à :

Théorème 2.
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors $f(I)$ est un intervalle.

Démonstration.
Posons $\alpha := \inf_I f$ et $\beta := \sup_I f$, tous deux pris dans $\overline{\mathbb{R}}$. Soit $\gamma \in (\alpha, \beta)$. Alors il existe a tel que $f(a) < \gamma$, et b tel que $f(b) > \gamma$. Quitte à échanger a et b, on sait que $a < b$ et que $f(a)$ et $f(b)$ sont de part et d'autre de γ. Par le théorème des valeurs intermédiaires, $\gamma \in f((a,b)) \subset f(I)$. Ceci étant vrai pour tout γ, on obtient $(\alpha,\beta) \subset f(I) \subset [\alpha,\beta] \subset \overline{\mathbb{R}}$. Suivant les cas $\alpha \in f(I)$ et $\beta \in f(I)$, on obtient quatre différents types possibles d'intervalles pour $f(I)$ (ouvert, semi-ouvert supérieurement, semi-ouvert inférieurement, fermé). □

1. Mais avec une disjonction de cas intéressante à expliciter !

Remarque 1.1.
Cette propriété n'est pas caractéristique de la continuité : une fonction peut vérifier la propriété des valeurs intermédiaires sans être continue.

2 Application 1 : Propriété des valeurs intermédiaires

On dit qu'une fonction réelle d'une variable réelle a la propriété des valeurs intermédiaires si l'image de tout intervalle est un intervalle. Le théorème des valeurs intermédiaires affirme que toute fonction continue sur un intervalle a la propriété des valeurs intermédiaires. La réciproque est fausse ; nous en donnons plusieurs contre-exemples.

2.1 Théorème de Darboux

Exemple 2.1.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin(1/x)$ si $x \neq 0$, et $f(0) = 1$. Alors f vérifie la propriété des valeurs intermédiaires sans être continue.

Théorème 3 (Théorème de Darboux [FGN·Ana1, Exercice 4.29 ; Gou, Exercice 4 p. 80 ; Moi, Exercice B-1 p. 138 ; Ska, Exercice 7.15])**.**
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Alors $f'(I)$ est un intervalle.

Démonstration.
Il suffit de montrer que f' a la propriété des valeurs intermédiaires. Supposons sans perte de généralité que $f'(a) < f'(b)$, et soit $c \in (f'(a), f'(b))$. Par définition des limites, il existe $h \in (0, b-a)$ tel que

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} < c < \frac{f(b) - f(b-h)}{h}.$$

Soit $g : x \mapsto \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, définie sur $[a, b-h]$. Alors g est continue, $g(a) < c$ et $g(b-h) > c$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $x \in (a, b-h)$ tel que

$$g(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = c.$$

Par le théorème des accroissements finis, il existe $y \in (x, x+h) \subset (a, b)$ tel que $f'(y) = c$. □

Exercice 2.2.
Enrichissez la démonstration précédente de dessins !

Remarque 2.3.
La propriété des valeurs intermédiaires n'est pas non plus caractéristique des dérivées de fonctions dérivables sur un intervalle. La démonstration en est cependant plus délicate. D'une part, si une telle fonction dérivée n'est pas nécessairement continue partout, elle est continue sur un G_δ-dense. De plus, il existe des fonctions très pathologiques ayant la propriété des valeurs intermédiaires tout en étant continues nulle part (fonction de Conway en base 13, par exemple, dont nous présentons une version dans la Sous-section 2.2 des compléments), qui ne sont donc pas des fonctions dérivées.

2.2 La fonction de Conway en base 13

Nous présentons une version de la fonction de Conway en base 11 (et non 13). Le développement en base 11 d'un nombre réel se fait à l'aide des 10 chiffres et de la lettre A (correspondant à 10 unités). Le développement en base 11 d'un nombre réel est unique dès qu'il n'est pas stationnaire à A.

Soit C_{11} la fonction définie par :

- ▷ Si le développement propre en base 11 d'un nombre réel x comporte au moins une fois le chiffre A, et un nombre fini de fois le chiffre A : en ignorant la virgule et en distinguant la dernière occurrence du chiffre A, il est de la forme $w_1 A w_2$, où w_1 est une suite finie de $\{0, 1, \ldots, 9, A\}$, et w_2 est une suite finie ou infinie de $\{0, 1, \ldots, 9\}$. On pose alors $C_{11}(x) := 0, w_2$.
- ▷ Sinon, on pose $C_{11}(x) = 0$.

Proposition 2.4.
Soit I un intervalle réel non réduit à un point. Alors $C_{11}(I) = [0, 1]$. En particulier, C_{11} est non continue mais vérifie la propriété des valeurs intermédiaires.

Démonstration.
L'intérieur de I étant non vide, il existe un sous-intervalle J délimité par des nombres 11-adiques à l'intérieur de I, autrement dit des entiers $p \in \mathbb{Z}$ et $n \geq 0$ tels que $[11^{-n}p, 11^{-n}(p+1)] \subset I$. Soit w_1 l'écriture de p en base 11. Soit $x \in [0, 1]$ et $0, w_2$ le développement décimal propre de x (ou son développement décimal impropre si $x = 1$). Alors, le nombre s'écrivant (au placement de la virgule près) $w_1 A w_3$ appartient à I, et son image par C_{11} est x. □

Il est plus délicat de démontrer, par exemple en utilisant de la théorie de Baire, que C_{11} n'est pas la dérivée d'une fonction dérivable.

Il est aussi un peu plus compliqué de définir une fonction dont l'image est $\mathbb{R}_+$, et encore un peu plus d'encoder le signe pour que son image soit $\mathbb{R}$. C'est possible en base 11, mais Conway a utilisé la base 13 afin de simplifier son codage.

3 Application 2 : Recherche de solutions d'équations

La plus fréquent utilisation du théorème des valeurs intermédiaire consiste à garantir l'existence de solutions de certaines équations. Un exemple classique est le suivant :

Propriété 3.1.
Tout polynôme réel de degré impair a au moins une racine réelle.

Démonstration.
Soit P de degré impair, et $a \neq 0$ sont coefficient de plus haut degré. Quitte à remplacer P par $-P$, ce qui ne change pas ses racines, on peut supposer que $a > 0$. Alors $\lim_{+\infty} P = +\infty$ et $\lim_{-\infty} P = +\infty$ (on peut par exemple factoriser par le terme de plus haut degré). En particulier, il existe $M > 0$ tel que $P(M) \geq 1$ et $P(-M) \leq -1$. Mais alors, par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $x \in (-M, M)$ tel que $P(x) = 0$. □

Nous en proposons deux prolongements : la recherche numérique de solutions par dichotomie, et la localisation théorique de racines de polynômes.

3.1 Recherche d'une solution d'une équation par dichotomie

On cherche une solution d'une équation de la forme $f(x) = y$, où y est un réel fixé, et $x \in I$ est l'inconnue. On suit la démonstration par dichotomie du théorème des valeurs intermédiaires.

Algorithme de dichotomie classique : On se place sur l'intervalle $[a, b]$ tel que $f(a)$ et $f(b)$ soient de part et d'autre de y. La méthode par dichotomie consiste à construire un couple de suites adjacentes qui convergent vers une solution ℓ de l'équation $f = y$.

- ▷ On pose $a_0 = a$ et $b_0 = b$.
- ▷ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $c_n := \frac{a_n+b_n}{2}$. Si $f(a_n)f(c_n) \leq 0$, on pose $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = c_n$; sinon, on pose $a_{n+1} = c_n$ et $b_{n+1} = b_n$.

L'erreur absolue de l'approximation de ℓ par a_n ou b_n est alors majorée par $(b_n - a_n) = (b - a)2^{-n}$.

Exercice 3.2.
Programmez l'algorithme de dichotomie dans le langage de votre choix, afin de résoudre numériquement des équations quelconques du type $\ln(x)e^{3x+\sin(x)} = 57$.

3.2 Complément : Méthode de dichotomie avec plusieurs solutions

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application continue. On se propose de déterminer des valeurs approchées des solutions de l'équation $f(x) = 0$. Admettons que l'étude des variations de f ait permis de déterminer le nombre m de solutions de cette équations, et que f change de signe en toutes ces solutions [2].

Séparer les solutions revient à déterminer des réels x_0, x_1, ..., x_m tels que $f(x_{i-1})f(x_i) < 0$ pour tout $1 \leq i \leq m$. Ainsi, l'équation $f(x) = 0$ a exactement une solution dans chacun des intervalles (x_{i-1}, x_i). On peut ensuite utiliser un algorithme de dichotomie (ou de descente de gradient, ou de Newton) sur chacun de ces intervalles.

Pour séparer les solution en connaissant leur nombre, on procède par essais successifs en s'aidant éventuellement des précisions apportées par le tableau de variations de f. En l'absence d'indication, on peut utiliser une méthode dichotomique sur le segment $[a, b]$:

1. On divise successivement l'intervalle en deux, puis en quatre, etc. ;
2. En notant $(a_k)_{0\leq k\leq 2^i}$ les extrémités de ces intervalles à l'étape i, on compte [3] le nombre de changements de signe dans la suite $f(a_k)$;
3. On s'arrête lorsqu'il y a exactement m changements de signe.

3.3 Encadrement des racines d'un polynôme

Application 3.3 (Encadrement des racines d'un polynôme [Moi, Exercice C-3 p. 286])**.**
Soit P un polynôme unitaire, à coefficients réels, et de coefficient constant non nul :

$$P(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_1X + a_0, \quad a_0 \neq 0.$$

On lui associe le polynôme Q défini par

$$Q(X) = X^n - |a_{n-1}|X^{n-1} - \ldots - |a_1|X - |a_0|.$$

1. *Montrez que Q a une unique racine réelle positive, et que cette racine est simple. On la notera r.*
2. *Montrez que $r \leq m := 1 + \max_{0\leq k\leq n-1}\{|a_k|\}$.*

2. Sinon, on utilise la dérivée de f.
3. En fait, on actualise à chaque étape.

3. *Montrez que toutes les racines de P (y compris complexes) sont inférieures à r en module.*
4. *Montrez que la méthode de Newton appliquée à m pour le polynôme Q converge vers r.*
5. *Supposons que les racines de P sont toutes réelles et distinctes. Décrivez un algorithme par dichotomie pour déterminer toutes ses racines.*

Démonstration.

1. La fonction polynômiale Q est négative en 0 et tend vers $+\infty$ en $+\infty$; par le théorème des valeurs intermédiaires, elle admet une racine positive. La fonction $g : x \mapsto \frac{Q(x)}{x^n}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, donc injective, donc Q a au plus une racine strictement positive (voire seulement positive, car $Q(0) < 0$). Soit r cette unique racine positive. Alors $Q(r) = 0$, donc $r^n = \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| r^k$, donc $nr^{n-1} = n \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| r^{k-1} > \sum_{k=0}^{n-1} k|a_k| r^{k-1}$, donc $Q'(r) > 0$ et r est racine simple.
2. En factorisant $m^n - 1$, on obtient $m^n > (m-1)\sum_{k=0}^{n-1} m^k$, donc $Q(m) \geq 0$, donc $m \geq r$.
3. Soit z une racine (éventuellement complexe) de P. Alors
$$|z^n| = \left|\sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k\right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| \cdot |z|^k,$$
donc $Q(|z|) \leq 0$. Or $|z| \geq 0$, donc $|z| \leq r$.
4. Par le même argument utilisé pour démontrer que $Q'(r) > 0$, on montre que $Q'(x) > 0$ et $Q''(x) > 0$ pour tout $x \in [r, +\infty)$. La fonction polynômiale Q est donc strictement convexe sur $[r, +\infty)$. Par conséquent [4], l'algorithme de Newton partant de m donne une suite à valeurs dans $[r, +\infty)$, strictement décroissante et convergeant vers r.
5. Nous renvoyons pour cette dernière question aux compléments.

□

4 Application 3 : Fonctions réciproques et homéomorphismes d'intervalles

Une autre application primordiale reste la définition de fonctions réciproques. Soit $f : I \to J$ une fonction continue. Le théorème des valeurs intermédiaires permet deux choses :

- ▷ De démontrer, le cas échéant, la surjectivité de f (celle-ci se lit aux extrémités des intervalles).
- ▷ Si f est bijective, de démontrer que son inverse est elle aussi continue.

On peut ainsi démontrer l'existence d'une fonction "racine carrée", inverse de la fonction $x \mapsto x^2$ de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$.

4.1 Réciproque partielle du théorème des valeurs intermédiaires

Avant d'étudier les homéomorphismes d'intervalles, faisons un détour par un résultat intermédiaire. Celui-ci est d'un intérêt indépendant et, bien que non obligatoire, il simplifie notoirement une partie de l'étude des homéomorphismes.

Proposition 4.1 ([FGN·Ana1, Exercice 4.10])**.**
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ vérifiant la propriété des valeurs intermédiaires. Alors f est continue si et seulement si, pour tout réel y, l'ensemble $f^{-1}(\{y\})$ est fermé dans I.

4. Cela peut se montrer par récurrence, en utilisant le fait que $\frac{Q(x)}{Q'(x)} = \int_r^x \frac{Q'(t)}{Q'(x)}\,\mathrm{d}t \leq (x-r)$ pour tout $x \geq r$ grâce à la croissance de Q'. Ceci dit, cette proposition est complètement évidente si l'on se souvient de la construction géométrique de l'algorithme de Newton !

Démonstration.
Pour simplifer, nous traitons le cas d'un intervalle I ouvert ; les deux autres cas y ressemblent. Soit $a < b$ deux réels. Nous allons montrer que $f^{-1}((a,b))$ est ouvert. L'ensemble $f^{-1}(\{a,b\})$ est fermé dans I comme union de deux fermés ; son complémentaire est donc ouvert dans I, donc ouvert. Or, les ouverts de $\mathbb{R}$ sont des unions disjointes d'intervalles [5]. Soit donc $f^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{a,b\}) = \bigsqcup_{i\in\mathcal{I}} U_i$ cette décomposition en intervalles ouverts.

Soit U_i, $i \in \mathcal{I}$ un de ces intervalles. Par le théorème des valeurs intermédiaires, $f(U_i)$ est un intervalle ; par construction, celui-ci ne contient ni a ni b. Donc ou bien $f(U_i) \subset (a,b)$, ou bien $f(U_i) \cap (a,b) = \emptyset$. Par conséquent,

$$f^{-1}((a,b)) = \bigsqcup_{\substack{i\in\mathcal{I} \\ f(U_i)\subset(a,b)}} U_i,$$

qui est ouvert comme union d'ouverts. Ceci étant vrai pour tout intervalle ouvert (a,b), la fonction f est continue. □

4.2 Caractérisation des homéomorphismes d'intervalles

Théorème 4 (Caractérisation des homéomorphismes)**.**
Une application $f : I \to J$ est un homéomorphisme si et seulement si elle est continue, surjective et strictement monotone.

Démonstration.
Soit $f : I \to J$ un homéomorphisme. Alors f est continue et surjective. Supposons f non strictement monotone. Comme f est injective, on peut trouver $a < b$ tels que $f(a) < f(b)$ (f est injective mais pas strictement décroissante) et $c < d$ tels que $f(c) > f(d)$ (f est injective mais pas strictement croissante).

Soit x le point minimisant f dans $\{a,b,c,d\}$. Alors $x \in \{a,d\}$. Nous distinguons quatres cas possibles [6]

- ▷ Si $x = a$, alors $a \neq c$ (sinon, on aurait $f(a) = f(c) > f(d)$, contredisant la minimalité de $f(a)$).
  - ▷ Si de plus $a < c$, on aurait $a < c < d$ et $f(a) < f(c)$, $f(d) < f(c)$. Mais alors, par le théorème des valeurs intermédiaires, un point $t \in (\max\{f(a), f(d)\}, f(c))$ aurait au moins deux préimages, une dans (a,c) et une dans (c,d), ce qui contredirait l'injectivité de f.
  - ▷ Si $c < a$, on aurait $c < a < b$ et $f(a) < f(c)$, $f(a) < f(b)$, conduisant à une contradiction similaire.

  Le cas $x = d$ conduit à des contradictions similaires.

Nous avons donc démontré par l'absurde que f est strictement monotone.

Supposons maintenant que f est continue, surjective et strictement monotone. Comme f est strictement monotone, elle est injective, donc bijective. Soit $a < b$ dans I. L'image d'un intervalle par f est un intervalle, donc $f((a,b))$ est un intervalle. Par stricte monotonie, les extrémités de $f((a,b))$ sont $f(a)$ et $f(b)$, qui n'appartiennent pas à $f((a,b))$ par injectivité, donc $f((a,b))$ est un intervalle ouvert. De même, $f((-\infty,a))$, $f((a,+\infty))$ et $f(I)$ sont ouverts dans J pour tout $a \in I$, donc l'image de tout intervalle ouvert de I est ouvert dans J. Or l'image d'un intervalle ouvert par f est l'image réciproque d'un intervalle ouvert par f^{-1}, donc f^{-1} est continue et f est un homéomorphisme. □

5. Il s'agit d'un cas particulier de décomposition en composantes connexes. Le nombre d'intervalles dans cette décomposition est dénombrable, mais cela ne sert pas ici.

6. Exercice : Faites des dessins correspondant à chaque cas.

Remarque 4.2.
La propriété de la Sous-section précédente simplifie la seconde partie de la démonstration. On a montré que f est bijective. Comme f est strictement monotone, $f^{-1}(I)$ est un intervalle pour tout intervalle I, donc f^{-1} a la propriété des valeurs intermédiaires. De plus, $(f^{-1})^{-1}(\{x\}) = \{f(x)\}$ pour tout x, donc est fermé pour tout x. Par la proposition, f^{-1} est continue.

Attention : Certaines références oublient la surjectivité ! Sans cette condition, l'application f est un homéomorphisme de I dans $f(I)$, mais il n'y a aucune raison pour que $f(I)$ coïncide avec J. Grâce au théorème des valeurs intermédiaires, la surjectivité peut se lire “aux extrémités des intervalles”, mais la condition précise dépend du type d'intervalle ainsi que de la croissance ou décroissance de f.

4.3 Intervalles homéomorphes

Définition 4.3 (Homéomorphisme)**.**
Une application $f : I \to J$ est un ***homéomorphisme*** *lorsque f est continue sur I, bijective, et f^{-1} est continue sur J. S'il existe un homéomorphisme de I dans J, on dit que I et J sont* ***homéomorphes****.*

La relation “Être homéomorphes” est une relation d'équivalence sur les parties de $\mathbb{R}$, et en particulier sur les intervalles.

On peut grâce au précédent théorème classifier les intervalles à homéomorphisme près.

Propriété 4.4.
Soient I et J deux intervalles non réduits à des points.
- ▷ *Si I et J sont des segments, ils sont homéomorphes.*
- ▷ *Si I et J sont ouverts, ils sont homéomorphes.*
- ▷ *Si I et J sont semi-ouverts, ils sont homéomorphes.*

Démonstration.
Il suffit de trouver des homéomorphismes dans chacun de ces cas. Par exemple, tout segment non réduit à un point $I = [a, b]$ est homéomorphe à $[0, 1]$; il suffit de choisir $f(x) = \frac{x-a}{b-a}$. Par compositions d'homéomorphismes, deux segments non réduits à des points sont toujours homéomorphes [7]. Le cas d'intervalles semi-ouverts ou ouverts bornés est identique, éventuellement en renversant l'orientation dans le cas d'intervalles semi-ouverts.

Il faut traiter à part les intervalles non bornés. Or :
- ▷ Pour tout a, l'intervalle $[a, +\infty)$ est homéomorphe à $(0, 1]$ par $x \mapsto e^{-(x-a)}$.
- ▷ Pour tout a, l'intervalle $(-\infty, a]$ est homéomorphe à $(0, 1]$ par $x \mapsto e^{x-a}$.
- ▷ L'intervalle $(-\infty, +\infty)$ est homéomorphe à $(-\pi/2, \pi/2)$ par arctan.

□

Théorème 5.
Deux intervalles homéomorphes sont de même nature, et les homéomorphismes envoient les extrémités fermées sur des extrémités fermées.

Démonstration.
Soient I, J deux intervalles et $f : I \to J$ un homéomorphisme.

Remarquons que f est bijective (surjective et strictement monotone). Quitte à remplacer J par $-J$, on peut supposer que f est strictement croissante. Étudions le cas où $I = [a, b)$ avec $a < b$ deux

7. On pourra expliciter un homéomorphisme de $[a, b]$ dans $[c, d]$

réels, les autres étant similaires. Alors $\alpha = f(a)$, et $\beta = \lim_{b^-} f = \sup_I f = \sup J$ existe dans $\overline{\mathbb{R}}$ par croissance de f.

Soit $y \in J$, et $x := f^{-1}(y)$. Soit $x' \in (x, b)$. Alors $y = f(x) < f(x') \leq \beta$, donc $\beta \notin J$: l'intervalle J est ouvert supérieurement. De plus, $\alpha = f(a) = \min J$. Donc $J = [\alpha, \beta)$ est bien du même type que $[a, b)$. $\square$

5 Application 4 : Existence de points fixes

Propriété 5.1 ([FGN·Ana1, Exercice 4.8 ; Ska, Exercice 7.1])**.**
Soit I un segment et $f : I \to I$ continue. Alors f admet un point fixe, i.e. il existe $x_0 \in I$ tel que $f(x_0) = x_0$.

Démonstration.
Écrivons $I = [a, b]$ et posons $g(x) := f(x) - x$ pour tout $x \in I$. Alors $g(a) = f(a) - a \geq 0$ et $g(b) = f(b) - b \leq 0$, donc il existe $c \in [a, b]$ tel que $g(0) = 0$. Mais alors $f(c) = c$. $\square$

Remarque 5.2.
Ce théorème admet une généralisation très puissante, le ***théorème du point fixe de Brouwer****. Ce théorème affirme qu'étant données une boule fermée $B \subset \mathbb{R}^n$ et $f : B \to B$ continue, l'application f admet un point fixe.*

Propriété 5.3 ([FGN·Ana1, Exercice 4.8])**.**
Soit I un segment et $f, g : I \to I$ continues. Supposons que f et g commutent, i.e. que $f \circ g = g \circ f$. Alors il existe $x_0 \in I$ tel que $f(x_0) = g(x_0)$.

Démonstration.
On procède par l'absurde. Supposons que f et g n'ont pas de point fixe commun. Alors, par le raisonnement précédent, ou bien $f < g$, ou bien $f > g$; quitte à intervertir f et g, plaçons-nous dans le premier cas. Une fonction continue sur un segment atteignant son maximum, soit $\varepsilon := -\max_I\{f - g\} > 0$. Alors on démontre par récurrence que, pour tout $n \geq 0$. on a $f^{(n)} \leq g^{(n)} - n\varepsilon$. Cela est vrai pour $n = 0$ et, par récurrence, si cette égalité est vraie au rang n,

$$f^{(n+1)} = f \circ f^{(n)} \leq g \circ f^{(n)} - \varepsilon = f^{(n)} \circ g - \varepsilon \leq g^{(n)} \circ g - n\varepsilon - \varepsilon = g^{(n+1)} - (n+1)\varepsilon.$$

Pour $n > \frac{b-a}{\varepsilon}$, on en déduit que $a \leq f^{(n)} \leq g^{(n)} - n\varepsilon \leq b - n\varepsilon$, ce qui est absurde. Donc f et g ont un point fixe commun. $\square$

Ces deux propriétés tombent en défaut si on enlève la condition de compacité sur I, par exemple en prenant $I = \mathbb{R}$. Il suffit alors de prendre par exemple $f : x \mapsto x + 1$ sur $\mathbb{R}$ (et $f = g$ pour la seconde propriété).

Exercice 5.4.
Soit I un intervalle ouvert ou semi-ouvert. En partant de $f : x \mapsto x+1$ (définie sur $\mathbb{R}$) et en utilisant des homéomorphismes explicites, construisez une fonction $g : I \to I$ sans point fixe.

6 Applications 5 : Un théorème de Lévy

Application 6.1 ([Moi, Exercice A-2 p. 138 ; FGN·Ana1, Exercice 4.9])**.**
Un cycliste parcourt 20 km en une heure. Montrer qu'il existe un intervalle de temps d'une demi-heure pendant lequel il parcourt exactement 10 km. Même question avec un intervalle de 3 min et une distance de 1 km, puis avec un intervalle de 45 min et une distance de 15 km.

Démonstration.
Soit $f(x)$ la distance (en kilomètres) parcourure après x minutes, et $g(x) = f(x+30) - f(x)$. Alors $g(0) + g(30) = f(60) - f(0) = 20$, donc :

- ▷ Ou bien $g(0) = g(30) = 10$, auquel cas les intervalles $[0, 30]$ et $[30, 60]$ conviennent tous deux ;
- ▷ Ou bien $g(0)$ et $g(30) = 20 - g(0)$ sont de part et d'autre de 10, auquel cas, par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $x \in (0, 30)$ tel que $g(x) = 10$, ce qui veut dire que le cycliste a parcouru 10 kilomètre entre les instants x et $x + 30$.

Pour des intervalles de 3 minutes, on pose $g(x) = f(x + 3) - f(x)$. Les sommes télescopiques impliquent que $g(0) + \ldots + g(57) = 20$. Si toutes ces valeurs sont égales à 1, on a terminé. Sinon, la plus petite, disons $g(a)$, est strictement inférieure à 1 et la plus grande, disons $g(b)$, strictement supérieure à 1. Là encore, par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe x tel que $g(x) = 1$, c'est-à-dire que le cycliste parcourt 1 kilomètre entre les instants x et $x + 3$.

Si le cycliste roule très vite [8] pendant les 5 premières et 5 dernières minutes, parcourant 10 kilomètre dans chacun de ces intervalles, alors on ne peut pas trouver d'intervalle de 45 minutes pendant lequel il parcourerait exactement 15 kilomètre ; plus précisément, au cours de tout intervalle de 45 minutes, le cycliste ne parcourt pas plus de 10 kilomètres. □

Plus généralement, pour tout entier $n \geq 1$, il existe un intervalle de $60/n$ minutes pendant lequel le cycliste parcourt $20/n$ kilomètres. De plus, pour tout $r > 1$ réel suffisamment grand, il existe un intervalle de $60/r$ minutes pendant lequel le cycliste parcourt $20/r$ kilomètres. Cependant, ce “suffisamment grand” dépend de f : pour tout $r > 1$ réel non entier fixé, on peut construire une fonction f telle qu'il n'existe pas d'intervalle de $60/r$ minutes pendant lequel le cycliste parcourt $20/r$ kilomètres. Ces précisions sont plus difficiles à démontrer ; voir à ce sujet [**FGN·Ana1, Exercice 4.9**].

7 Applications 6 : Un théorème des fonctions implicites

Théorème 6 (Théorème des fonctions implicites, approche élémentaire)**.**
Soient U un voisinage de l'origine dans $\mathbb{R}^2$ et $f : U \to \mathbb{R}$ une application continue. Supposons que f admette sur U une dérivée partielle $\partial_y f$ par rapport à sa seconde variable, continue en $(0, 0)$. Supposons de plus que $f(0, 0) = 0$ et $\partial_y f(0, 0) \neq 0$.

Alors il existe un voisinage rectangulaire $V \times W \subset U$ de $(0, 0)$ et une fonction $\varphi : V \to W$ telles que

$$\{(x, y) \in V \times W : \; f(x, y) = 0\} = \{(x, \varphi(x)), x \in V\},$$

et de plus φ est continue.

Autrement dit, l'ensemble des solutions de l'équation $f = 0$ est, sur $V \times W$, le graphe d'une fonction continue φ.

Démonstration.
Quitte à remplacer f par $-f$, on peut supposer que $\partial_y f(0, 0) > 0$. Par continuité de $\partial_y f$, on peut trouver $m > 0$ et un tel voisinage $V' \times W$ de $(0, 0)$ tel que $\partial_y f \geq m$ sur $V' \times W$. En particulier, pour tout $x \in V'$, la fonction $y \mapsto f(x, y)$ est strictement croissante, donc injective, donc l'équation $f = 0$ a au plus une solution sur $\{x\} \times W$.

Soit $a > 0$ tel que $[-a, a] \subset W$. Alors $f(0, -a) < 0$ et $f(0, a) > 0$. Par continuité, il existe un voisinage $V \subset V'$ de 0 tel que $f(x, -a) < 0$ et $f(x, a) > 0$ pour tout $x \in V$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, pour tout $x \in V$, l'équation $f = 0$ a au moins une solution sur $\{x\} \times W$.

8. À environ 120 kilomètres par heure, ce qui est possible dans une descente *très* raide.

Par les deux paragraphes précédents, pour tout $x \in V$, l'équation $f = 0$ a exactement une solution sur $\{x\} \times W$. Notons $\varphi(x)$ cette solution. Il reste à démontrer que φ est continue sur V. Soient x, $x' \in V$. Alors $f(x, \varphi(x)) = f(x', \varphi(x')) = 0$, donc

$$0 = f(x', \varphi(x')) - f(x, \varphi(x)) = \left[f(x', \varphi(x')) - f(x, \varphi(x'))\right] + \left[f(x, \varphi(x')) - f(x, \varphi(x))\right].$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
\left|f(x, \varphi(x')) - f(x', \varphi(x'))\right| &= \left|f(x, \varphi(x')) - f(x, \varphi(x))\right| \\
&= \left|\int_{\varphi(x)}^{\varphi(x')} \partial_y f(x, t) \, \mathrm{d}t\right| \\
&\geq m|\varphi(x) - \varphi(x')|.
\end{aligned}$$

Soient $x \in V$ et $\varepsilon > 0$. Soit $\delta > 0$ tel que $m^{-1} |f(x, \varphi(x')) - f(x', \varphi(x'))| \leq \varepsilon$ pour tout $x' \in (x - \delta, x + \delta)$. Alors $|\varphi(x) - \varphi(x')| \leq \varepsilon$ pour tout $x' \in (x - \delta, x + \delta)$: la fonction φ est bien continue. □

Remarque 7.1.
Le "vrai" théorème des fonctions implicites[9] *a une hypothèse plus forte : f doit être de classe $\mathcal{C}^1$. Sa conclusion est elle aussi plus forte : la fonction φ est non seulement continue, mais de classe $\mathcal{C}^1$.*

8 Applications 7 : Formule de la moyenne

Propriété 8.1 (Formule de la moyenne)**.**
Soit $I = [a, b]$ un segment et f, $g : I \to \mathbb{R}$ continues. Supposons g de signe constant. Alors il existe $c \in [a, b]$ tel que

$$\int_a^b f(x)g(x) \, \mathrm{d}x = f(c) \int_a^b g(x) \, \mathrm{d}x.$$

Démonstration.
Quitte à multiplier chaque côté de l'égalité par -1, on peut supposer que g est positive. Mais alors

$$\begin{aligned}
\min_I \left(f \int_a^b g(x) \, \mathrm{d}x\right) &= \left(\min_I f\right) \int_a^b g(x) \, \mathrm{d}x \\
&\leq \int_a^b f(x)g(x) \, \mathrm{d}x \\
&\leq \left(\max_I f\right) \int_a^b g(x) \, \mathrm{d}x \\
&= \max_I \left(f \int_a^b g(x) \, \mathrm{d}x\right),
\end{aligned}$$

le minimum et le maximum étant tous deux atteints par compacité. Par le théorème des valeurs intermédiaires à la fonction $f \int_a^b g(x) \, \mathrm{d}x$, définie sur I, et à la valeur $\int_a^b f(x)g(x) \, \mathrm{d}x$, il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) \int_a^b g(x) \, \mathrm{d}x = \int_a^b f(x)g(x) \, \mathrm{d}x$. □

Remarque 8.2.
Quitte à diviser g par $\int_a^b g(x) \, \mathrm{d}x$, on peut supposer que g est positive et d'intégrale 1 sur $[a, b]$, et donc est la densité d'une mesure de probabilité sur $[a, b]$. Dans ce cadre, si f est continue sur $[a, b]$, la formule de la moyenne affirme qu'il existe c tel que $f(c) = \mathbb{E}(f)$, ce qui justifie son nom.

9. En dimension 2.

9 Complément : Fonctions dérivables et difféomorphismes

9.1 Monotonie des fonctions dérivables

La condition de stricte monotonie apparaissant dans la caractérisation des homéomorphismes se lit sur les dérivées.

Proposition 9.1.
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de continue et dérivable. f est strictement croissante (respectivement, strictement décroissante) si et seulement si $f' \geq 0$ (respectivement, $f' \leq 0$), et s'il n'existe pas d'intervalle non réduit à un point $J \subset I$ tel que $f' = 0$ sur J.

Démonstration.
Montrons le sens direct par sa contraposée. S'il existe un point x tel que $f'(x) < 0$, alors on peut trouver $h > 0$ tel que $f(x+h) < f(x)$ (ou $f(x-h) > f(x)$), donc f n'est pas croissante. De plus, s'il existe un tel intervalle J, alors, pour tous x, $y \in J$,

$$f(y) = f(x) + \int_x^y f'(t)\ \mathrm{d}t = f(x),$$

donc f n'est pas strictement croissante.

Montrons le sens indirect. Soient $x < y$ deux points de I. Par le théorème des accroissements finis, il existe $z \in (x, y)$ tel que $f(y) - f(x)(y-x)f'(z) \geq 0$, donc f est croissante. De plus, il existe $z \in (x, y)$ tel que $f'(z) > 0$. Soit donc h suffisamment petit tel que $f(z+h) > f(z)$ et $z + h \leq y$. Alors $f(x) \leq f(z) < f(z+h) \leq f(y)$. La fonction f est donc bien strictement croissante. □

La condition de cette proposition garantit que f est strictement monotone, ce qui suffit, à surjectivité près, à montrer que f est un homéomorphisme, donc que f^{-1} est continue. Cependant, cela ne suffit pas pour montrer que f^{-1} est dérivable, comme le montrer l'exemple de la fonction carré en 0.

9.2 Caractérisation des difféomorphismes d'intervalles de $\mathbb{R}$

Définition 9.2 (Difféomorphisme)**.**
*Une application $f : I \to J$ est un **difféomorphisme** lorsque f est $\mathcal{C}^1$ sur I, bijective, et f^{-1} est $\mathcal{C}^1$ sur J. S'il existe un difféomorphisme de I dans J, on dit que I et J sont **difféomorphes**.*

La relation "Être difféomorphes" est une relation d'équivalence sur les parties de $\mathbb{R}$, et en particulier sur les intervalles. Elle coïncide, pour les intervalles, avec la relation "Être homéomorphes" – mais il s'agit là d'un phénomène propre à la dimension 1, et faux même en dimension 2 !

Proposition 9.3.
Soit $f : I \to J$ un difféomorphisme. Alors $f'(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$. De plus, pour tout $y \in J$,

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$

Démonstration.
Pour tout $y \in J$, on sait que $f \circ f^{-1}(y) = y$. Les fonctions f et f^{-1} étant dérivables, la formule de dérivation en chaîne implique que, pour tout $y \in J$,

$$f'(f^{-1}(y)) \cdot (f^{-1})'(y) = 1.$$

En particulier, $f'(f^{-1}(y)) \neq 0$ et $(f^{-1})'(y)$ est donné par la formule annoncée. Enfin, en appliquant cela à $y = f(x)$, on en déduit que $f'(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$. □

Théorème 7.
Soit I un intervalle d'extrémités $a < b$ dans $\mathbb{R}$, et $f : I \to J$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, surjective et dont la dérivée ne s'annule pas. Alors :
- ▷ *J est un intervalle de même nature que I, d'extrémités $\alpha = \lim_{a^+} f$ et $\beta = \lim_{b^-} f$;*
- ▷ *f^{-1} est $\mathcal{C}^1$, sa dérivée ne s'annule pas et est du même signe que f'. En particulier, f est un difféomorphisme.*

Démonstration.
Comme la dérivée de f ne s'annule pas, par le théorème des valeurs intermédiaires, f est strictement monotone. Le premier point découle alors du théorème correspondant pour les homéomorphismes. Il reste à démontrer le second point. Il y a pour cela plusieurs stratégies.

Première stratégie : On encadre à la main les taux d'accroissement de f^{-1} pour montrer que ceux-ci convergent vers $\frac{1}{f' \circ f^{-1}}$. On sait déjà que f^{-1} est bien définie et continue. Soit $y \in I$ et h suffisamment petit. Alors

$$f(f^{-1}(y)) + h = y + h = f(f^{-1}(y+h)),$$

et donc

$$h = \int_{f^{-1}(y)}^{f^{-1}(y+h)} f'(t) \, \mathrm{d}t.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Soit $\delta > 0$ tel que $|f'(t) - f'(f^{-1}(y))| \leq \varepsilon$ pour tout $|t| \leq \delta$. Soit $\nu > 0$ tel que $|f^{-1}(y+h) - f^{-1}(y)| \leq \delta$ pour tout $|h| \leq \nu$. Alors, si $|h| \leq \nu$, en supposant pour simplifier que f est croissante et $h \geq 0$,

$$\left[f'(f^{-1}(y)) - \varepsilon\right] \left[f^{-1}(y+h) - f^{-1}(y)\right] \leq h \leq \left[f'(f^{-1}(y)) + \varepsilon\right] \left[f^{-1}(y+h) - f^{-1}(y)\right],$$

et donc

$$\frac{1}{f'(f^{-1}(y)) + \varepsilon} \leq \frac{f^{-1}(y+h) - f^{-1}(y)}{h} \leq \frac{1}{f'(f^{-1}(y)) - \varepsilon}.$$

Par conséquent, en faisant tendre ε vers 0, on montre que f^{-1} est dérivable en 0, et on retrouve la formule de sa dérivée.

Deuxième stratégie : On construit f^{-1} d'une façon qui implique directement que cette fonction est de classe $\mathcal{C}^1$. Soit $y \in J$. Posons, pour tout $z \in J$,

$$g(z) := f^{-1}(y) + \int_y^z \frac{1}{f'(f^{-1}(t))} \, \mathrm{d}t.$$

L'intégrand est bien défini et continu, donc g est de classe $\mathcal{C}^1$. De plus,
- ▷ $g \circ f(f^{-1}(y)) = g(y) = f^{-1}(y)$;
- ▷ $(g \circ f)' = g' \circ f \cdot f' = \frac{f'}{f' \circ f^{-1} \circ f} = 1$ sur I.

Par conséquent, $g(f(x)) = x$ pour tout $x \in I$. L'application f étant surjective, $f(g(y)) = y$ pour tout $y \in J$, donc g est bien l'inverse de f. En particulier, f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^1$.

Troisième stratégie : On utilise la "vraie" version du théorème des fonctions implicites, d'après la Remarque 7.1. Soit $x_0 \in I$. Soit $F(x, y) := x - f(y)$ pour tous $x \in I$ et $y \in \mathbb{R}$. Alors F est de classe $\mathcal{C}^1$, et sa dérivée partielle par rapport à la seconde variable est exactement $-f'$, donc ne s'annule pas. Par le théorème des fonctions implicites, il existe un voisinage rectangulaire $V \times W$ de $(f(x_0), x_0)$ et une fonction φ de classe $\mathcal{C}^1$ sur V telles que

$$\{(x, y) \in V \times W : \; x = f(y)\} = \{(x, \varphi(x)), x \in V\}.$$

Mais alors $f(\varphi(x)) = x$ pour tout $x \in V$, donc φ est l'inverse de f sur U. Donc φ et f^{-1} coïncident sur U. Or φ est de classe $\mathcal{C}^1$, donc f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^1$ sur le voisinage U de $f(x_0)$. Le point x_0 étant arbitraire, f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^1$. □

Remarque 9.4.
L'utilisation du théorème des fonctions implicites peut être vue comme une forme de triche. Ce théorème se démontre typiquement à partir du théorème d'inversion locale, qui implique directement le résultat souhaité.

Exercice 9.5.
Reprendre la deuxième méthode ci-dessus, en modifiant la définition de la fonction g afin d'obtenir directement $(f \circ g)' = 1$.

Application 9.6.
La fonction racine carrée est un difféomorphisme de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$. Sa dérivée en $y \in \mathbb{R}_+^*$ vaut bien

$$\left(\sqrt{}\right)'(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}.$$

En 0, la dérivée de la fonction carré est nulle, donc la fonction racine carrée n'est pas dérivable.

Remarque 9.7.
Ce théorème a des analogues en dimension supérieure (théorème d'inversion locale, d'inversion globale, dérivée de l'inverse...). Ces analogues ne seront pas traités ici ; ils méritent une leçon à part entière.

9.3 Dérivabilité d'ordre supérieur

La caractérisation des homéomorphismes et des difféomorphismes est différente : une fonction peut être un homéomorphisme de classe $\mathcal{C}^1$ sans être un difféomorphisme. Cette différence n'apparaît qu'entre ces deux ordres de différentiabilité : il n'y a pas de nuan supplémentaire pour des fonctions plus dérivables.

Proposition 9.8.
Soit $f : I \to J$ un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^k$, avec $k \geq 1$. Alors f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^k$.
En particulier, si f est surjective et f' ne s'annule pas, alors f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^k$.

Démonstration.
On procède par récurrence sur k. L'assertion est vraie pour $k = 1$. Supposons-la vraie au rang $k \geq 1$, et soit f de classe $\mathcal{C}^{k+1}$. Alors f est un difféomorphisme, et

$$f' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}.$$

Par hypothèse, f' est de classe $\mathcal{C}^k$; par hypothèse de récurrence, f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^k$. Donc $(f^{-1})'$ est de classe $\mathcal{C}^k$, donc f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^{k+1}$. □

10 Références

[FGN·Ana1] : *Oraux X-ENS. Analyse 1.* S. Francinou, H. Gianella, S. Nicolas.
[Gou] : *Les maths en tête, Analyse.* X. Gourdon.
[Moi] : *Mathématiques supérieures, Analyse.* J. Moisan, F. Chanet, F. Delmas, N. Tosel.
[Ska] : *Analyse.* G. Skandalis.