Nombres réels, suites réelles. Notes de cours.

L'objectif du cours suivant sera d'aborder les développements décimaux de nombres réels. Avant de commencer, il nous faut donner un sens à ces développements décimaux, et pour cela, revenir sur les propriétés des nombres réels.

1 Axiomatique des réels

Notre point de départ sera la propriété (hors programme) suivante :

Théorème 1.
À unique isomorphisme près, les réels sont l'unique corps ordonné archimédien complet.

Ce théorème affirme plus précisément qu'étant donné deux corps ordonnés archimédiens complets $\mathbb{K}_1$ et $\mathbb{K}_2$, il existe un unique isomorphisme de $\mathbb{K}_1$ dans $\mathbb{K}_2$. Les nombres réels ayant ces propriétés, tout corps ordonné archimédien complet peut être identifié, sans ambiguïté (l'isomorphisme est unique), avec les nombres réels.

En particulier, les nombres réels sont entièrement caractérisés par ces propriétés. Mais que signifient-elles ?

1.1 Corps ordonnés

Définition 1.1 (Corps ordonné)**.**
*Un **corps ordonné**[1] est la donnée d'un corps $(\mathbb{K}, +, \times)$ et d'un ordre total $<$ sur $\mathbb{K}$, qui soit compatible avec les axiomes de corps :*

- ▷ *Pour tous a, b, $c \in \mathbb{K}$, si $a < b$, alors $a + c < b + c$.*
- ▷ *Pour tous a, $b \in \mathbb{K}$, si $0 < a$ et $0 < b$, alors $0 < ab$.*

Exercice 1.2.
Soit $\mathbb{K}$ un corps ordonné. Montrez que :

1. *Pour tout $a \in \mathbb{K}^*$, ou bien $0 < a$ ou bien $0 < -a$.*
2. *Pour tous a, b, $c \in \mathbb{K}$, si $a < b$ et $0 < c$, alors $ac < bc$.*
3. $0 < 1$.
4. *Pour tout $a \in \mathbb{K}$, si $0 < a$ alors $0 < a^{-1}$.*

Déduisez-en que $\mathbb{C}$ ne peut pas être muni d'une structure de corps ordonné.

Remarque 1.3.
Si $\mathbb{K}$ est un corps ordonné, alors $\mathbb{Q}$ se plonge de façon unique dans $\mathbb{K}$. En effet, comme $\mathbb{K}$ est un anneau, il existe un unique morphisme d'anneaux $\mathbb{Z} \to \mathbb{K}$, qui à n associe $n \cdot 1$ (si n est positif, on somme n copies de l'unité 1).

Par les axiomes d'ordre, si $0 < n$ (dans $\mathbb{Z}$) alors $0 < n \cdot 1$ (dans $\mathbb{K}$), donc ce morphisme est injectif. En particulier, tout entier non nul a un unique inverse dans $\mathbb{K}$, ce qui permet d'étendre ce morphisme d'anneaux en un morphisme de corps de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{K}$, et ce de façon unique. Plus précisément, à $p/q \in \mathbb{Q}$ on associe $p(q \cdot 1)^{-1}$.

1. On peut parler de corps partiellement ordonné. Dans ce texte, sauf mention du contraire, tous les corps ordonnés sont *totalement* ordonnés.

1.2 Corps ordonnés archimédiens

Définition 1.4 (Corps ordonné archimédien)**.**
Un corps ordonné $\mathbb{K}$ est dit ***archimédien*** *si la copie de $\mathbb{Z}$ (ou $\mathbb{N}$, ou $\mathbb{Q}$) qu'il contient n'est pas majorée :*
$$\forall x \in \mathbb{K},\ \exists n \in \mathbb{N},\ x < n.$$

Exercice 1.5.
Soit $\mathbb{K}$ un corps archimédien. Montrez que, pour tous a, $b \in \mathbb{K}$ tels que $0 < a$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $b < na$.

Dans un corps archimédien, tous les élements non nuls ont le "même ordre de grandeur". En particulier, un corps archimédien est un corps qui ne contient pas d'éléments infinitésimaux (si x était un tel élément, alors nx serait infinitésimal pour tout $n \in \mathbb{N}$, et en particulier $nx < 1$ pour tout n, ce qui contredit la propriété archimédienne).

Exercice 1.6.
Soit $\mathbb{K}$ un corps archimédien. Montrez que la suite $(1/n)_{n\geq 1}$ converge vers 0.

Exercice 1.7.
Soit $\mathbb{K}$ un corps archimédien et $q > 1$.

1. *Montrez que $q^n \geq 1 + n(q-1)$ pour tout $n \geq 0$.*
2. *Déduisez-en que $\lim_{n\to+\infty} q^n = +\infty$, en prenant soin de souligner l'application de la propriété archimédienne.*

Exercice 1.8.
La première question de l'exercice précédent peut être abordée de diverses manières : récurrence, somme de suites géométriques, formule du binôme de Newton, théorème fondamental de l'analyse appliqué à $x \mapsto nx^{n-1}$, convexité de la fonction $x \mapsto x^n$. Rédigez-en une démonstration à l'aide de chacune des méthodes évoquées. Quels sont les avantages éventuels de chacune de ces méthodes ?

1.3 Suites de Cauchy et complétude

Un espace métrique complet est un espace "sans trou ponctuel" : toute suite censée converger converge. Mais, pour que cela ait un sens, il faut définir ce que l'on entend par "suite censée converger" ; cela conduit à la notion de *suite de Cauchy.*

Définition 1.9 (Suite de Cauchy)**.**
Soit (X, d) un espace métrique. Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite ***de Cauchy*** *si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tous m, $n \geq N$,*
$$d(u_n, u_m) \leq \varepsilon.$$
L'espace (X, d) est dit ***complet*** *si toute suite de Cauchy converge.*

D'une certaine façon, les termes u_n d'une suite de Cauchy deviennent de plus en plus proche les uns des autres quand n augmente. La notion de suite de Cauchy est ainsi liée à celle de suite convergente :

Exercice 1.10.

1. *Montrez que toute suite convergente est de Cauchy.*
2. *Montrez qu'une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est de Cauchy si et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x \in X$ et $N \geq 0$ tels que $u_n \in B(x, \varepsilon)$ pour tout $n \geq N$. Comparez avec la définition d'une suite convergente.*

Les archétypes d'espaces complets sont les espaces vectoriel réels normés de dimension finie E. De plus, tout fermé d'un espace complet est complet, donc tout fermé de E est complet. Certains espaces vectoriels normés de dimension infinie sont aussi complets ; ce sont les *espaces de Banach*, qui jouent un rôle central en analyse.

Exercice 1.11.
Montrer à partir de la définition que la suite $((-1)^n/n)_{n\geq 1}$ est de Cauchy.

Exercice 1.12.
Soit $q > 1$. Montrer que la suite $(\sum_{k=0}^{n-1} q^{-k})_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy.

Remarque 1.13.
La lectrice attentive aura repéré une arnaque. Étant donné un corps ordonné $\mathbb{K}$, aucune distance n'est a priori donnée. On peut utiliser la valeur absolue $|x| = \max\{x, -x\}$ et définir $d(x, y) := |x-y|$, mais cette fonction est à valeur dans $\mathbb{K}$. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on obtient bien une distance ; mais si $\mathbb{K}$ est un corps ordonné quelconque, ce n'est plus le cas. Il y aurait besoin de définir une notion de suite de Cauchy dont la définition ressemblerait, mais associée à un corps ordonné et non pas à un espace métrique. Vu que, dans notre cadre, nous travaillerons au final avec les réels, cette distinction est sans importance.

2 Propriétés des réels

D'après le théorème énoncé au début de ces notes, on peut déduire toutes les propriétés des nombres réels des propriétés algébriques ($\mathbb{R}$ est un corps), d'ordre, de la propriété archimédienne et de la complétude de $\mathbb{R}$. Nous verrons donc ces propriétés comme des axiomes des nombres réels.

Les objectifs suivants sont :

- ▷ D'une part, de déduire certaines propriétés des nombres réels (propriété de la borne supérieure) à partir de ces axiomes.
- ▷ D'autre part, s'il faut savoir utiliser la propriété de Cauchy pour démontrer la convergence d'une suite, celle-ci est un peut lourde à employer en pratique. Nous chercherons donc à obtenir de nouveaux critères suffisants pour démontrer que des suites convergent.

2.1 Théorème des suites adjacentes

Commençons par le :

Théorème 2 (Théorème des suites adjacentes)**.**
Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles telles que :

- ▷ *$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante ;*
- ▷ *$(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante ;*
- ▷ *$\lim_{n\to+\infty}(b_n - a_n) = 0$.*

Alors $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers une même limite $\ell \in \mathbb{R}$.

Démonstration. Montrons tout d'abord que $a_n \leq b_n$ pour tout $n \geq 0$. Par l'absurde, supposons qu'il existe un entier N tel que $a_N > b_N$. Alors, par monotonie de ces deux suites, pour tout $n \geq N$, on a $a_n \geq a_N > b_N \geq b_n$. Ainsi, $a_n - b_n \geq a_N - b_N > 0$, ce qui contredit le fait que $\lim_{n\to+\infty}(b_n - a_n) = 0$.

Montrons que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite réelle. Il suffit de montrer que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy. Soit $\varepsilon > 0$. Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$, on ait $|b_n - a_n| \leq \varepsilon$. Soient m, $n \geq N$.

Alors $a_m \in [a_m, b_m] \subset [a_N, b_N]$ et $a_n \in [a_n, b_n] \subset [a_N, b_N]$, donc $|a_n - a_m| \leq |b_N - a_N| \leq \varepsilon$, ce qu'il fallait démontrer.

Soit ℓ la limite de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Alors $b_n = a_n + (b_n - a_n)$, et $(b_n - a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0. Par somme de limites, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ. $\square$

2.2 Propriété de la borne supérieure

Faisons un détour par une propriété des réels :

Théorème 3 (Propriété de la borne supérieure)**.**
Soit A une partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée. Alors A admet une unique borne supérieure.

Rappelons que A est majorée s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $x \leq M$ pour tout $x \in A$. Un tel M est un majorant de A, et la borne supérieure, si elle existe, est par définition le plus petit des majorants de A.

Démonstration.
Nous allons construire une suite convergeant vers le supremum de A, par dichotomie. Pour cela, choisissons $a_0 \in A$ (un tel élément existe, car A est non vide), et b_0 un majorant de A (un tel élément existe, car A est bornée supérieurement). De plus, $a_0 \leq b_0$.

On définit par récurrence des suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant :
- ▷ si $[\frac{a_n+b_n}{2}, b_n]$ contient un élément de A : $a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$ et $b_{n+1} = b_n$.
- ▷ sinon : $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$.

On montre par des récurrences simples que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, et $(b_n - a_n) = 2^{-n}(b_0 - a_0)$ converge vers 0. Les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont donc adjacentes, et convergent donc vers une même limite ℓ.

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par construction de ces suites, b_n est un majorant de A et $[a_n, b_n] \cap A$ est non vide. Par conséquent, $x \leq \ell$ pour tout $x \in A$ (sinon, il existerait $x \in A$ avec $x > \ell$, mais alors $b_n < x$ pour tout n assez grand, ce qui contredit le fait que les b_n sont tous des majorants), donc ℓ est un majorant de A. De plus, si $\ell' < \ell$, alors on peut trouver n tel que $a_n > \ell'$, mais alors A contient un élément strictement supérieure à ℓ', donc ℓ' n'est pas un majorant de A. Finalement, ℓ est bien le plus petit majorant de A, donc la borne supérieure de A. $\square$

2.3 Suites monotones

Revenons aux suites réelles :

Théorème 4.
Toute suite réelle croissante et majorée est convergente. De même, toute suite réelle décroissante et minorée est convergente.

Démonstration.
Nous allons montrer seulement la première assertion. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante majorée. Soit $A := \{u_n,\ n \in \mathbb{N}\}$. Alors A est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$. Soit $\ell := \sup A$, qui existe par la propriété de la borne supérieure. Montrons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.

Soit $\varepsilon > 0$. Comme ℓ est la borne supérieure de $\{u_n\ :\ n \in \mathbb{N}\}$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\ell - \varepsilon \leq u_N \leq \ell$. Mais alors, pour tout $n \geq N$, par croissante de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et le fait que ℓ est une borne supérieure de A,

$$\ell - \varepsilon \leq u_N \leq u_n \leq \ell.$$

En particulier, $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$ pour tout $n \geq N$, ce qu'il fallait démontrer. $\square$

2.4 Bilan

Pour montrer la convergence d'une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, quelques méthodes à savoir sont :

- ▷ Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est somme, produit, ou plus généralement composée par une fonction continue d'une suite convergente.
- ▷ Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante majorée ou décroissante minorée.
- ▷ Exprimer explicitement la limite ℓ, et montrer que $(|u_n - \ell|)_{n\geq 0}$ converge vers 0, par exemple à l'aide de majorations bien trouvées.
- ▷ Utiliser le théorème des suites adjacentes, éventuellement en lien avec le théorème des gendarmes.
- ▷ En dernier ressort, montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy.

Les critères de monotonie sont propres aux réels, et n'ont pas de sens en l'absence de relation d'ordre (typiquement en dimension supérieure). Le critère de Cauchy est valable dans un cadre bien plus général. En particulier, il reste valable dans des espaces de Banach, donc permet de montrer la convergence de suites de fonctions (par exemple, de suites de fonctions continues sur un intervalle).

3 Valeurs d'adhérence

De nombreuses suites ne convergent pas ; dans ce cas, ont peut partiellement décrire leur comportement asymptotique à l'aide de la notion de *valeurs d'adhérence.*

3.1 Définition

Définition 3.1 (Suite extraite)**.**
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite. Une ***sous-suite extraite*** *est une suite $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, où $k \mapsto n_k$ est injective (ou, de façon équivalente, strictement croissante)*[2]*.*

Exemple 3.2.
Les suites $(1)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(-1)_{n\in\mathbb{N}}$ sont extraites de $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$, la première en choisissant $n_k = 2k$ et la seconde $n_k = 2k+1$.

Définition 3.3 (Valeur d'adhérence)**.**
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs réelle. Un élément $\ell \in \mathbb{R}$ est une ***valeur d'adhérence*** *de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s'il existe une sous-suite extraite $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ convergeant vers ℓ.*

Exemple 3.4.
1 *et* -1 *sont valeurs d'adhérence de $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

L'ensemble des valeurs d'adhérence d'une suite convergente n'est pas très intéressant :

Proposition 3.5.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs réelle. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ, alors l'ensemble des valeurs d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est $\{\ell\}$.

3.2 Propriétés élémentaires

Notre objectif sera de comprendre l'ensemble des valeurs d'adhérence d'une suite à valeurs réelle. Commençons par deux propriétés élémentaires.

2. Il est souvent suffisant de travailler avec des fonction $k \mapsto n_k$ tendant vers $+\infty$, ce qui donne une notion plus générale de sous-suite extraite.

Proposition 3.6.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs réelles. L'ensemble des valeurs d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est fermé.

Démonstration.
Soit $(\ell_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de valeurs d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers $\ell \in \mathbb{R}$. Nous voulons montrer que ℓ est une valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

On construit récursivement une suite $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de la façon suivante :
- ▷ $n_0 = 0$;
- ▷ Soit $k \in \mathbb{N}$. Il existe une sous-suite extraite $(u_{m_i})_{i\in\mathbb{N}}$ convergeant vers ℓ_{k+1}. En particulier, pour tout i suffisamment grand, $|u_{m_i} - \ell_{k+1}| \leq 1/(k+1)$. On peut en particulier trouver un i suffisamment grand tel que $|u_{m_i} - \ell_{k+1}| \leq 1/(k+1)$ et $m_i > n_k$. On pose $n_{k+1} := m_i$.

Par construction, $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante et $|u_{n_k} - \ell_k| \leq 1/k$ pour tout $k \geq 1$, donc $(u_{n_k} - \ell_k)_{k\geq 0}$ converge vers 0. Par somme de limites, $(u_{n_k})_{k\geq 0}$ converge vers ℓ, donc ℓ est bien une valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. □

Proposition 3.7.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs réelles ***bornée****. L'ensemble des valeurs d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est non vide.*

Démonstration.
On procède par dichotomie[3]. Soit $M \geq 0$ tel que $|u_n| \leq M$ pour tout M. On définit par récurrence deux suites $(a_n)_{n\geq 0}$ et $(b_n)_{n\geq 0}$ par :
- ▷ $a_0 = -M$ et $b_0 = M$;
- ▷ Pour tout $n \geq 0$, on pose $m_n := \frac{a_n+b_n}{2}$. Si $[a_n, m_n]$ contient une infinité de termes de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$, on pose $a_{n+1} := a_n$ et $b_{n+1} := m_n$. Sinon, on pose $a_{n+1} := m_n$ et $b_{n+1} := b_n$.

Par construction, la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par M, donc convergente. La suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par $-M$, donc convergente. Enfin, $b_n - a_n = 2^{n-1}M$, donc ces deux suites ont la même limite ; notons-la ℓ.

On montre par récurrence que, pour tout n, l'intervalle $[a_n, b_n]$ contient une infinité de termes de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$. C'est évident si on est dans le premier cas de l'aternative ; dans le second, si $[a_n, b_n]$ contient une infinité de termes et $[a_n, m_n]$ seulement un nombre fini, alors $[m_n, b_n]$ en contient un nombre infini.

On construit par récurrence une suite $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de la façon suivante : $n_0 = 0$, et n_{k+1} est le plus petit entier strictement supérieur à n_k tel que $u_{n_k} \in [a_k, b_k]$. Alors $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante et $u_{n_k} \in [a_k, b_k]$ pour tout k, donc, par le théorème des gendarmes, $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ. Donc ℓ est une valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. □

Remarque 3.8.
Une suite non bornée n'a pas nécessairement de valeur d'adhérence réelle ; il suffit de prendre $u_n = n$.

Dans le cas des suites bornées, on peut préciser le lien entre convergence et ensemble des valeurs d'adhérences.

Proposition 3.9.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs réelles ***bornée*** *et $\ell \in \mathbb{R}$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ si et seulement si l'ensemble des valeurs d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est $\{\ell\}$.*

Démonstration.
Le sens direct a déjà été démontré ; focalisons-nous sur le sens indirect. On procède par contraposition. Supposons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers ℓ. Alors il existe $\varepsilon > 0$ et tel que $\{n \in \mathbb{N} :$

3. D'une façon qui n'est pas sans rappeler la démonstration de la propriété de la borne supérieure.

$|u_n - \ell| > \varepsilon\}$ soit infini. Soit $v_k = u_{n_k}$ la sous-suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ contenant exactement les termes de la suite hors de $(\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon)$. Alors $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée, donc admet une valeur d'adhérence ℓ'. Donc $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$, et a fortiori $(u_n)_{n\ \in\mathbb{N}}$, admet une sous suite extraite convergeant vers ℓ'. Donc ℓ' est valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Or $\ell' \notin (\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon)$, donc a fortiori $\ell' \neq \ell$. Donc l'ensemble des valeurs d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas $\{\ell\}$. $\square$

3.3 Définition alternative et représentation graphique

Une autre définition de l'ensemble des valeurs d'adhérence d'une suite est la suivante.

Proposition 3.10.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs réelles. L'ensemble des valeurs d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est

$$\bigcap_{n\geq 0} \overline{\{u_k \ : \ k \geq n\}}.$$

Démonstration.
Nous procédons par double inclusion. Soit ℓ une valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Il existe donc une sous-suite extraite $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ convergeant vers ℓ. Soit $N \geq 0$. Alors $n_k \geq N$ pour tout k suffisamment grand, donc $u_{n_k} \in \{u_m \ : \ m \geq N\}$ pour tout k suffisamment grand, donc il existe une suite à valeur dans $\{u_m \ : \ m \geq N\}$ convergeant vers ℓ, donc $\ell \in \overline{\{u_m \ : \ m \geq N\}}$. Ceci étant vrai pour tout $N \geq 0$,

$$\ell \in \bigcap_{n\geq 0} \overline{\{u_m \ : \ m \geq N\}}.$$

Réciproquement, soit $\ell \in \bigcap_{n\geq 0} \overline{\{u_m \ : \ m \geq N\}}$. On construit récursivement une sous-suite extraite en posant $n_0 = 0$ et, pour tout k, en prenant pour n_{k+1} le plus petit strictement supérieur à n_k tel que $|u_{n_{k+1}} - \ell| \leq 1/(k+1)$. Un tel entier existe car $\ell \in \overline{\{u_m \ : \ m \geq n_k + 1\}}$. Mais alors la sous-suite $(u_{n_k})_{k\geq 0}$ converge bien vers ℓ, donc ℓ est une valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\geq\mathbb{N}}$. $\square$

Remarque 3.11.
On retrouve immédiatemment le fait que l'ensemble des valeurs d'adhérence d'une suite est fermé, ici comme intersection de fermés. La deuxième partie de la démonstration est d'ailleurs très proche de la démonstration du fait que l'ensemble des valeurs d'adhérence d'une suite est fermé.

Cette caractérisation des valeurs d'adhérence donne une façon de représenter des valeurs d'adhérence d'une suite $(u_n)_{n\geq\mathbb{N}}$:

- ▷ On choisit $1 \ll n \ll N$;
- ▷ On représente sur une droite les valeurs de la suite $(u_k)_{n\leq k\leq N}$.

Si N est très grand, on peut espérer que cette représentation soit proche de celle de $\overline{\{u_k \ : \ k \geq n\}}$; si n est lui-même assez grand, on obtient à peu près les valeurs d'adhérence de $(u_k)_{k\geq\mathbb{N}}$.

Exercice 3.12.
Écrivez un programme, dans le langage de votre choix, qui affiche une approximation des valeurs d'adhérence des suites suivantes :

1. $((-1)^n(1 + 1/n))_{n\geq 1}$;
2. $(\sin(n))_{n\geq 0}$;
3. *la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par la récurrence $u_0 = 0,5$ et $u_{n+1} = 3,56993u_n(1 - u_n)$;*
4. $(\ln(n) \ mod \ 1)_{n\geq 1}$, *en discutant des valeurs de n et N choisies.*

3.4 Compacité

Définition 3.13 (Compacité)**.**
Une partie K d'un espace métrique (X, d) est dite ***(séquentiellement) compacte*** *si toute suite à valeur dans K a une valeur d'adhérence dans K.*

On a alors :

Théorème 5 (Théorème de Borel-Lebesgue)**.**
Les compacts de $\mathbb{R}$ sont exactement les parties fermées bornées de $\mathbb{R}$.

Démonstration.
Soit K une partie fermée bornée de $\mathbb{R}$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans K. Alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, donc a une valeur d'adhérence ; or, K étant fermé, cette valeur d'adhérence appartient à K.

La réciproque se démontre par contraposition. Si K n'est pas fermée, on peut trouver une suite d'éléments de K convergeant vers un réel $\ell \notin K$; l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite est alors $\{\ell\}$, qui est bien disjoint de K. Si K n'est pas bornée, on peut trouver une suite d'éléments de K tendant vers $\pm\infty$, donc n'ayant pas de valeur d'adhérence réelle. □

3.5 Droite réelle achevée

On peut adjoindre $\pm\infty$ à $\mathbb{R}$ pour obtenir un nouvel espace topologique, la **droite réelle achevée** $\overline{\mathbb{R}}$.

Exercice 3.14.
Explicitez une fonction continue de $[-\pi/2, \pi/2]$ dans $\overline{\mathbb{R}}$ dont l'inverse est continue.

Cet espace topologique est compact. En particulier, toute suite à valeurs dans $\mathbb{R}$ a une valeur d'adhérence **dans** $\overline{\mathbb{R}}$. Autrement dit, quitte à ajouter les valeurs $\pm\infty$, ont peut toujours garantir l'existence de valeurs d'adhérence. Les théorèmes qui s'appliquaient aux suites bornées admettent alors des versions plus générales :

- ▷ Toute suite réelle monotone converge dans $\overline{\mathbb{R}}$.
- ▷ Toute suite réelle admet des valeurs d'adhérence dans $\overline{\mathbb{R}}$.
- ▷ Soit $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Une suite réelle converge vers ℓ si et seulement si l'ensemble de ses valeurs d'adhérence *dans* $\overline{\mathbb{R}}$ est $\{\ell\}$.

Exercice 3.15.
Montrez qu'une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est non bornée si et seulement si elle l'ensemble des ses valeurs d'adhérence dans $\overline{\mathbb{R}}$ contient $+\infty$ ou $-\infty$.

Remarque 3.16.
L'espace $\overline{\mathbb{R}}$ hérite de nombreuses propriétés topologiques de $\mathbb{R}$, comme par exemple la propriété de la borne supérieure.

3.6 Limsup, liminf

Deux valeurs d'adhérence ont une importance particulière : la limsup et la liminf.

Définition 3.17 (Limsup, liminf)**.**
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs réelles. La ***limite supérieure*** *de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la plus grande valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\overline{\mathbb{R}}$, et sa* ***limite inférieure*** *la plus petite valeur d'adhérence. On les note[4] respectivement* $\limsup_{n\to+\infty} u_n$ *et* $\liminf_{n\to+\infty} u_n$.

4. On rencontre parfois les notations $\overline{\lim}_{n\to+\infty} u_n$ et $\underline{\lim}_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice 3.18.

1. *Calculez les limites supérieures et inférieures de* $((-1)^n(1+1/n))_{n\geq 1}$.
2. *Montrez que* $\limsup_{n\to+\infty} u_n = \liminf_{n\to+\infty} u_n =: \ell$ *si et seulement si* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge, et que dans ce cas* $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$.

La limite supérieure (et, similairement, la limite inférieure) admet différentes caractérisations qui expliquent son nom. Nous ne traiterons que de la limite supérieure ici ; le cas de la limite inférieure est laissée en exercice.

Proposition 3.19.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite à valeurs réelles. La suite* $(\sup_{k\geq n} u_k)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* $\limsup_{n\to+\infty} u_n$

Démonstration.
La suite $(\sup_{k\geq n} u_k)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, car pour tout n on a

$$\sup_{k\geq n} u_k = \max\{u_n, \sup_{k\geq n+1} u_k\} \geq \sup_{k\geq n+1} u_k.$$

Or toute suite monotone converge dans $\overline{\mathbb{R}}$. Soit ℓ sa limite.

Soit $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ une sous-suite extraite convergeant vers $\ell' \in \overline{\mathbb{R}}$ e $K \in \mathbb{N}$. Alors pour tout $k \geq K$ on a $n_k \geq n_K \geq K$, donc $u_{n_k} \leq \sup_{i\geq K} u_i$. En prenant la limite $k \to +\infty$, on a $\ell' \leq \sup_{i\geq K} u_i$. En prenant la limite $K \to +\infty$, on obtient bien $\ell' \leq \ell$: toute valeur d'adhérence est plus petite que ℓ.

Montrons que ℓ est valeur d'adhérence. On définit par récurrence une suite $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ par $n_0 = 0$ et, pour tout k, on choisit n_{k+1} comme le plus petit entier strictement supérieur à n_k tel que $|u_{n_k} - \ell| \leq 1/(k+1)$. Un tel entier existe toujours ; sinon, on aurait $u_j \leq \ell - 1/(k+1)$ pour tout $j > n_k$, ce qui contredirait la définition de la limsup. Mais alors, par construction, $\lim_{k\to+\infty} u_{n_k} = \ell$, donc ℓ est bien valeur d'adhérence. $\square$

Exercice 3.20.
Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux suites réelles.*

1. *Montrez que, si* $u_n \leq v_n$ *pour tout* n, *alors* $\limsup_{n\to+\infty} u_n \leq \limsup_{n\to+\infty} v_n$.
2. *Montrez que*[5] $\limsup_{n\to+\infty}(u_n+v_n) \leq \limsup_{n\to+\infty} u_n + \limsup_{n\to+\infty} v_n$.
3. *Montrez que* $\limsup_{n\to+\infty}(u_n+v_n) = \limsup_{n\to+\infty} u_n + \lim_{n\to+\infty} v_n$ *si* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers un réel.*

Exercice 3.21.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite réelle.*

1. *Montrez que, pour tout* $x > \limsup_{n\to+\infty} u_n$, *seul un nombre fini de valeurs de* $(u_n)_{n\geq\mathbb{N}}$ *sont dans* $[x, +\infty)$.
2. *Montrez que, pour tout* $x < \limsup_{n\to+\infty} u_n$, *un nombre infini de valeurs de* $(u_n)_{n\geq\mathbb{N}}$ *sont dans* $[x, +\infty)$.
3. *Justifiez que* $\limsup_{n\to+\infty} u_n$ *soit caractérisée par ces deux propriétés.*

Finalement, mentionnons un avantage pratique des limites supérieures et inférieures. Contrairement au limites, elles existent toujours. Pour montrer qu'une limite existe, on peut donc travailler séparément sur ses limites supérieures et inférieures afin de montrer que celles-ci coïncident. Souvent, l'une des des deux est beaucoup plus facile à manipuler que l'autre.

5. On perd donc des choses en utilisant les limites supérieures et inférieures au lieu de limites ; par exemple, l'additivité.

4 Références

[Ska] : *Analyse*. G. Skandalis.

Le texte **[Ska, Chapitres I et III]** recouvre une partie de ces notes.