Équations différentielles. Notes de cours.

Table des matières

Le but de ce document est de revenir sur le théorème de Cauchy-Lipschitz [1] affirmant l'existence et l'unicité de solutions à certaines équations différentielles.

1 Équations différentielles d'ordre 1 scalaire

1.1 Équations linéaires, équations affines

1.1.1 Équations à coefficients constants

Commençons par les équations linéaires à coefficient constant. Soient a, t_0, y_0 trois réels. L'équation :

$$\left\{\begin{array}{lcl} y'(t) & = & ay(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}, \\ y(t_0) & = & y_0 \end{array}\right. ,$$

d'inconnue $y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, a une unique solution :

$$u(t) = y_0 e^{t-t_0} \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Plus généralement, l'ensemble des solutions de l'**équation homogène**

$$y'(t) = ay(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

est un espace vectoriel de dimension 1.
Si l'on rajoute un second membre (et un paramètre réel b) :

$$\left\{\begin{array}{lcl} y'(t) & = & ay(t) + b \quad \forall t \in \mathbb{R}, \\ y(t_0) & = & y_0 \end{array}\right. ,$$

l'équation différentielle a toujours une unique solution dans $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. L'ensemble des solutions dans $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ de l'équation différentielle

$$y'(t) = ay(t) + b \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

est une droite affine. En effet, étant donnée une solution particulière u_0 (par exemple $u_0(t) = -b/a$ si $a \neq 0$, et $u_0(t) = bt$ si $a = 0$), l'ensemble des solutions est l'ensemble des fonctions qui sont somme de u_0 et d'une solution de l'équation homogène associée.

1.1.2 Équations à coefficients variables

Soit I un intervalle ouvert. Tout ce qui précède reste valable si l'on remplace les réels a et b par des fonctions continues a, $b \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$. L'équation

$$\left\{\begin{array}{lcl} y'(t) & = & a(t)y(t) \quad \forall t \in I, \\ y(t_0) & = & y_0 \end{array}\right. ,$$

d'inconnue $y \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$, a une unique solution :

$$u(t) = y_0 e^{\int_{t_0}^t a(s)\,\mathrm{d}s} \quad \forall t \in I.$$

Si de plus a est de classe $\mathcal{C}^k$, alors u est automatiquement de classe $\mathcal{C}^{k+1}$. Plus généralement, l'ensemble des solutions de l'équation homogène

$$y'(t) = a(t)y(t) \quad \forall t \in I$$

est encore une fois un espace vectoriel de dimension 1.

1. Ou théorème de Cauchy, ou de Picard, ou de Picard-Lidelöf...

Remarque 1.1.
L'existence et l'unicité d'une telle solution, dans ce cadre, peut se démontrer à la main. L'existence est évidente : il suffit de montrer que la formule exhibée convient.

Montrons l'unicité. Soient u_1 une solution de cette équation. Supposons pour simplifier que $y_0 > 0$. Soit J l'intervalle maximal contenant y_0 et sur lequel u et u_1 coïncident. Alors :

- ▷ *J contient y_0, donc est non vide.*
- ▷ *$\{t \in \mathbb{R} : \ u(t) = u_1(t)\} = (u - u_1)^{-1}(\{0\})$ est fermé, par continuité de u et u_1. L'intervalle J est une composante connexe de cet ensemble, donc est lui aussi fermé dans I.*
- ▷ *Soit $t \in J$. Alors $u(t) > 0$, donc $u_1(t) > 0$. Par continuité, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $u_1 > 0$ sur $(t - \varepsilon, t + \varepsilon)$. Sur cet intervalle,*
$$\ln(u_1)'(s) = \frac{u_1'(s)}{u_1(s)} = a(s),$$
donc par intégration $\ln(u_1)(s) = \ln(u_1)(t) + \int_t^s a(x) \, \mathrm{d}x = \ln(u)(s)$ pour tout $s \in (t - \varepsilon, t + \varepsilon)$. Donc u_1 et u coïncident sur un voisinage $(t - \varepsilon, t + \varepsilon)$ de t. Par conséquent, J est ouvert and I.

Ainsi, J est non vide et à la fois fermé et ouvert dans I. Donc $J = I$, et $u_1 = u$.

De même, l'équation
$$\begin{cases} y'(t) & = & a(t)y(t) + b(t) \quad \forall t \in I, \\ y(t_0) & = & y_0 \end{cases},$$
d'inconnue $y \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$, a une unique solution, et l'ensemble des solutions sans condition initiale fixée est une droite affine. La seule difficulté consiste à trouver une solution particulière. Cela se fait à l'aide de la méthode de la **variation de la constante**. Remarquons que l'ensemble des solutions de l'équation $y'(t) = a(t)y(t)$ est
$$\{Ce^{\int_{t_0}^t a(s) \, \mathrm{d}s}, \ C \in \mathbb{R}\}. \tag{1}$$
Cherchons une solution de la forme $u(t) = C(t)e^{\int_{t_0}^t a(s) \, \mathrm{d}s}$, où C est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Alors, pour tout $t \in I$,
$$\begin{aligned} C'(t)e^{\int_{t_0}^t a(s) \, \mathrm{d}s} + a(t)C(t)e^{\int_{t_0}^t a(s) \, \mathrm{d}s} &= a(t)e^{\int_{t_0}^t a(s) \, \mathrm{d}s} + b(t) \\ C'(t)e^{\int_{t_0}^t a(s) \, \mathrm{d}s} &= b(t) \\ C'(t) &= b(t)e^{-\int_{t_0}^t a(s) \, \mathrm{d}s}. \end{aligned}$$
Pour simplifier, choisissons la solution telle que $C(t_0) = 0$. En intégrant, on trouve
$$\begin{aligned} C(t) &= \int_{t_0}^t b(x)e^{-\int_{t_0}^x a(s) \, \mathrm{d}s} \, \mathrm{d}x, \\ u(t) &= y_0 e^{\int_{t_0}^t a(s) \, \mathrm{d}s} + \int_{t_0}^t b(x)e^{-\int_{t_0}^x a(s) \, \mathrm{d}s} \, \mathrm{d}x \cdot e^{\int_{t_0}^t a(s) \, \mathrm{d}s} \\ &= y_0 e^{\int_{t_0}^t a(s) \, \mathrm{d}s} + \int_{t_0}^t b(x)e^{\int_x^t a(s) \, \mathrm{d}s} \, \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Remarque 1.2.
En pratique, il faut retenir la démarche, pas la formule finale !

Exercice 1.3.
Considérons l'équation différentielle :

$$(t+1)y'(t) + ty(t) = (t+1)^2$$

Décrivez l'ensemble de ses solutions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $(-\infty, -1)$ et sur $(1, \infty)$. Déduisez-en l'ensemble des solutions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ de cette équation.

Exercice 1.4.
Démontrez l'unicité de la solution $u \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ de l'équation avec second membre

$$\begin{cases} y'(t) & = & a(t)y(t) + b(t) \quad \forall t \in I, \\ y(t_0) & = & y_0 \end{cases}.$$

Finalement, on a démontré :

Théorème 1 (Théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire, version scalaire)**.**
Soient I un intervalle et a, $b \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$. Soient $t_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$. Alors ***il existe une unique*** *solution $u \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ de l'équation différentielle*

$$\begin{cases} y'(t) & = & a(t)y(t) + b(t) \\ y(t_0) & = & y_0 \end{cases}.$$

De plus, pour tout $k \geq 0$, si a, $b \in \mathcal{C}^k(I, \mathbb{R})$, alors $u \in \mathcal{C}^k(I, \mathbb{R})$.

L'ensemble des solutions de l'équation différentielle sans condition initiale est une droite affine, dont la direction est l'ensemble des solutions de l'équaiton homogène.

1.2 Équations différentielles à variables séparables

Un autre cas important d'équation différentielle scalaire d'ordre 1 est celui des équations **à variables séparables**. Commençons par une présentation plus "physicienne". Écrivons $y' = \frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dt}}$. Une équation différentielle est à variables séparables si, en manipulant les symboles dy et dt comme des nombres, on peut la mettre sous la forme

$$\begin{cases} f(y)\mathrm{dy} & = & g(t)\mathrm{dt}, \\ y(t_0) & = & y_0 \end{cases},$$

où f est une fonction continue et ne s'annulant pas, et g une fonction continue.

Soit F une primitive de f, et G une primitive de g. Alors, en intégrant la première des deux égalités sur l'intervalle $[t_0, t]$,

$$F(y(t)) - F(y(t_0)) = G(t) - G(t_0)$$
$$F(y(t)) = F(y_0) + G(t) - G(t_0).$$

De plus, F est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ dont la dérivée ne s'annule pas, donc un difféomorphisme. Par conséquent,

$$y(t) = F^{-1}((y_0) + G(t) - G(t_0)),$$

qui est de classe $\mathcal{C}^1$ comme composée de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.

L'avantage de cette méthode est de pouvoir traiter explicitement des exemples d'équations différentielles non linéaires, y compris des modèles intéressants.

Exemple 1.5 (Modèle logistique).
Considérons un modèle d'évolution de population. Les individus se reproduisent à un taux $\lambda > 0$*, mais la croissance de la population est limitée par les ressources. En notant* $P_{\max}$ *la population maximale pouvant être soutenue par ces ressources et* P *la population au temps* t*, le modèle logistique affirme que*

$$P'(t) = \lambda P(t) \left(\frac{P_{\max} - P(t)}{P_{\max}} \right).$$

Supposons que l'on connaît la population P_0 *an temps* $t = 0$*. Posons* $u(t) := P/P_{\max}$*. Alors* u *est solution de l'équation différentielle*

$$\begin{aligned} y'(t) &= \lambda y(t)(1 - y(t)) \\ \frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dt}} &= \lambda y(1-y) \\ \frac{1}{y(1-y)}\mathrm{dy} &= \lambda \mathrm{dt}, \end{aligned}$$

et $y(0) = u_0 := P_0/P_{\max}$*. En posant* $f(x) = \frac{1}{x(1-x)}$ *et* $g(t) = \lambda t$*, on a bien une équation à variables séparées. En l'intégrant,*

$$\begin{aligned} \int_{u_0}^{u(t)} \frac{1}{x(1-x)} \, \mathrm{d}x &= \int_0^t \lambda s \, \mathrm{d}s \\ \left[\ln \left(\frac{x}{1-x} \right) \right]_{u_0}^{u(t)} &= \lambda t \\ \ln \left(\frac{u(t)}{1-u(t)} \right) &= \ln \left(\frac{u_0}{1-u_0} \right) + \lambda t \\ u(t) &= \frac{u_0}{u_0 + (1-u_0)e^{-\lambda t}}. \end{aligned}$$

Cette méthode appelle plusieurs remarques.

1.2.1 Formalisation

La séparation de la fraction $\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dt}}$ est très pratique pour mener les calculs, mais plus difficile à justifier mathématiquement. Cela peut se faire en interprétant $f(y)\mathrm{dy}$ et $g(t)\mathrm{dt}$ comme des *formes différentielles*, mais il n'est pas nécessaire de recourir à cet arsenal. En effet, peut s'arrêter à l'étape

$$f(y(t))y'(t) = g(t),$$

et reconnaître la dérivée d'une fonction composée :

$$(F \circ y)'(t) = G'(t).$$

Il reste à intégrer cette dernière égalité entre t_0 et t.

1.2.2 Espace des solutions

Une différence importante par rapport aux équations différentielles affines est que l'ensemble des solutions d'une telle équation n'est en général plus un sous-espace affine. Il reste "de dimension 1", au sens ou l'ensemble des solutions est naturellement paramétrée par la valeur y_0 en un point t_0 fixé.

1.2.3 Domaine des solutions

Une autre différence importante par rapport aux équations différentielles affines est que, même si l'équation est définie pour tout $t \in \mathbb{R}$, les solutions peuvent n'être définies que sur un intervalle plus petit !

Par exemple, l'équation différentielle

$$\begin{cases} y'(t) &= 1 + y(t)^2, \\ y(t_0) &= y_0 \end{cases}$$

est à variables séparables :

$$\frac{1}{1+y^2}\mathrm{dy} = \mathrm{dt}$$
$$\arctan(y(t)) - \arctan(y_0) = t - t_0$$
$$y(t) = \tan\left(t - t_0 + \arctan(y_0)\right).$$

Les solutions de cette équation différentielle ne sont définies que sur des intervalles bornés. Le problème posé est que la fonction F utilisée précédemment prend ses valeurs dans $(-\pi/2, \pi/2)$, et donc son inverse n'est défini que sur cet intervalle.

2 Le théorème de Cauchy-Lipschitz, version scalaire

2.1 Formalisme

Le théorème de Cauchy-Lipschitz assure l'existence et l'unicité des solutions d'équations différentielle, sous des conditions très générales. Dans un premier temps, explicitons le formalisme associé.

Dans ce cadre, une équation différentielle ordinaire est la donnée d'une condition initiale (la valeur y_0 au paramètre t_0), et d'une relation entre le paramètre t, la valeur de la fonction y, et la valeur de la dérivée y'. Pour le théorème de Cauchy-Lipschitz, il faut plus précisément que l'on puisse exprimer y' à partir de y et t : il existe une fonction de deux variables réelles F telle que $y'(t) = F(t, y(t))$. Une équation différentielle est donc de la forme

$$\begin{cases} y'(t) &= F(t, y(t)) \\ y(t_0) &= y_0 \end{cases}.$$

Cela inclut la plupart des équations différentielles du premier ordre. Par exemple, l'équation différentielle

$$\begin{cases} y'(t) - 2y^2(t) &= t \\ y(0) &= 1 \end{cases}.$$

correspond aux choix $F(t, y) = t + 2y^2$, ainsi que $t_0 = 0$ et $y_0 = 1$.

En particulier, les équations affines rentrent dans ce cadre : l'équation $y'(t) = a(t)y(t) + b(t)$ correspond au choix $F(t, y) = a(t)y + b(t)$. De même, pour les équations à variables séparables : si f ne s'annule pas, l'équation $f(y)\mathrm{dy} = \mathrm{g(t)dt}$ correspond au choix $F(t, y) = \frac{g(t)}{f(y)}$.

2.2 Domaine des solutions et intervalle maximal

La question du domaine des solutions qui apparaît notamment pour les équations à variables séparable est plus désagréable qu'il n'y semble. En effet, une équation vient toujours avec un ensemble de définition, c'est-à-dire un ensemble sur lequel cet équation a un sens et dans lequel on cherche ses solutions.

Dans le cadre linéaire, l'équation était bien posée pour des fonctions dans $\mathcal{C}^1(I,\mathbb{R})$, et la solution appartenait encore à cet ensemble. Cependant, l'équation différentielle

$$\left\{\begin{array}{rcl} y'(t) & = & 1+y(t)^2, \\ y(t_0) & = & y_0 \end{array}\right.$$

est bien posée localement pour tout $t\in\mathbb{R}$, mais n'admet pas de solution dans $\mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$. On aurait envie de dire que la solution de l'équation est la fonction $u(t)=\tan(t-t_0+\arctan(y_0))$ définie pour $t\in(t_0-\arctan(y_0)-\frac{\pi}{2},t_0-\arctan(y_0)-\frac{\pi}{2})$, mais l'ensemble de définition de la solution n'est pas fixé *a priori* : il dépend des conditions initiales, et n'est déterminé qu'après résolution de l'équation.

Une solution est donc en fait la donnée :

- ▷ d'un intervalle ouvert I voisinage de t_0 ;
- ▷ d'une fonction $f:I\to\mathbb{R}$, solution de l'équation différentielle.

On va chercher une solution définie sur un intervalle le plus grand possible. Remarquons que si l'on dispose de deux solutions f, g définie sur deux intervalles I, J et coïncidant sur $I\cap J$, alors on peut construire une solution définie sur $I\cup J$. On peut donc étendre les intervalles de définition.

Théorème 2.1 (Théorème de Cauchy-Lipschitz $\mathcal{C}^1$, version scalaire)**.**
*Soit $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ une fonction **de classe** $\mathcal{C}^1$. Soient $t_0\in\mathbb{R}$ et $y_0\in\mathbb{R}$. Alors **il existe une unique** solution f de classe $\mathcal{C}^1$ maximale de l'équation différentielle*

$$\left\{\begin{array}{rcl} y'(t) & = & F(t,y(t)) \\ y(t_0) & = & y_0 \end{array}\right. .$$

Cette solution est de plus de classe $\mathcal{C}^2$.

L'unique solution maximale (I,f) d'une telle équation différentielle vérifie les deux propriétés suivantes :

- ▷ l'intervalle I est le plus grand possible : si l'on se donne une solution $g:J\to\mathbb{R}$, où J est un intervalle, alors $J\subset I$.
- ▷ la solution maximale est unique au sens où si $g:J\to\mathbb{R}$, où J est un intervalle, alors $g=f_{|J}$: les seules solutions de l'équation sur un intervalle sont les restrictions de la solution maximale à des sous-intervalles.

Remarque 2.2.
Rappelons qu'une fonction $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ si et seulement si ses dérivées partielles $\frac{\partial F}{\partial t}$ et $\frac{\partial F}{\partial y}$ sont bien définies et continues sur $\mathbb{R}^2$.

Il se peut que la fonction F soit seulement définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Cela n'affecte ni les conclusions du théorème, ni cette remarque.

Remarque 2.3.
*Il est important ici de travailler avec des **intervalles** (connexes !). Le résultat est faux si on enlève cette condition. Par exemple, l'équation différentielle $y'=1+y^2$ avec condition initiale $y(0)=0$ admet une unique solution maximale, définie sur l'intervalle $(-\pi/2,\pi/2)$, la fonction tangente. Mais on peut étendre cette solution, et ce avec une infinité de degrés de libertés, par exemple en posant $f(t)=\tan(t-50,42)$ pour $t\in(50,42-\pi/2,50,42+\pi/2)$. Ce n'est pas une contradiction avec le théorème de Cauchy-Lipschitz car $(50,42-\pi/2,50,42+\pi/2)\cup(-\pi/2,\pi/2)$ n'est pas un intervalle.*

Remarque 2.4.

On se place dans les conditions du théorème de Cauchy-Lipschitz. Supposons que la solution maximale f est définie sur un intervalle bornée (a, b). Alors f tend vers $+\infty$ ou $-\infty$ en a comme en b.

Le raisonnement est grossièrement le suivant : à chaque fois que f rencontre l'intervalle $[-M, M]$ avant le temps a, elle reste un temps borné inférieurement ε dans l'intervalle $[-M-1, M+1]$. Vu que f n'est définie que jusqu'au temps a, elle ne passe qu'au plus a/ε fois dans l'intervalle $[-M, M]$. Ainsi, f quitte tout intervalle compact de $\mathbb{R}$; ses valeurs d'adhérence sont donc dans $\pm\infty$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, f ne peut pas avoir à la fois $+\infty$ et $-\infty$ comme valeurs d'adhérences, donc f tend vers une de ces deux valeurs.

Remarque 2.5.
La version linéaire $y'(t) = a(t)y(t) + b(t)$ du théorème de Cauchy-Lipschitz présuppose un type d'équation très particulier, mais a des conclusions plus fortes, à plusieurs points de vue :

- ▷ *Le domaine de définition des solutions est connu, et le même que celui des fonction a et b. Il ne dépend pas des conditions initiales. Il n'y a pas de phénomène d'explosion en temps fini ; ces explosions ne peuvent se produire que si l'équation est non linéaire.*
- ▷ *L'espace des solutions (sans condition initiale) a de plus une structure affine, ce qui n'est en général pas le cas si l'équation est non linéaire.*
- ▷ *La régularité demandée est moindre. Il suffit que a et b soient continues, ce qui est plus faible que de demander que la fonction $(t, y) \mapsto a(t)y + b(t)$ soit de classe $\mathcal{C}^1$.*

2.3 Une généralisation

Ici, nous avons par simplicité énoncé le théorème pour des fonctions F de classe $\mathcal{C}^1$. Un critère plus général existe, celui de *fonction uniformément localement lipschitzienne*[2]. Une fonction F satisfait cette condition si F est continue et si, pour tous compacts K_T et K_R, il existe $M \geq 0$ tel que, pour tous $t \in K_T$ et tous x, $y \in K_R$,

$$|F(t, x) - F(t, y)| \leq M|x - y|.$$

Cela permet d'inclure des équations du type $y'(t) = t + |y(t)|$. De façon plus utile, :

Exercice 2.6.
Soit I un intervalle ouvert réel et a, $b \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$. Montrez que la fonction

$$F : \begin{cases} I \times \mathbb{R} & \to \quad \mathbb{R} \\ (t, y) & \mapsto \quad a(t)y + b(t) \end{cases}$$

est uniformément localement lipschitzienne.

En particulier, cette version du théorème de Cauchy-Lipschitz permet bien de démontrer l'existence et l'unicité de solutions d'équations affines, sans besoin de recourir à un argument *ad hoc* ! L'absence de phénomène d'explosion demande cependant un argument supplémentaire, mais peut se démontrer sans recourir à des formules explicites.

2.4 Unicité des solutions

L'unicité des solutions découlant du théorème de Cauchy-Lipschitz a des conséquences importantes.

2. Ou une version semblable de ce vocabulaire : localement lipschitzienne par rapport à la seconde variable de manière uniforme en la première, semi-lipschitzienne à paramètre...

2.4.1 Signe des solutions

La première est de permettre d'encadrer des solutions d'une même équation différentielle.

Proposition 2.7. *Soit $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction* **de classe** $\mathcal{C}^1$*. Soient u_1, u_2 deux solutions de l'équation différentielle*

$$y'(t) = F(t, y(t))$$

définie sur un même intervalle I (pas nécessairement maximal). Soit $t_0 \in I$. Si $u_1(t_0) \leq u_2(t_0)$, alors $u_1(t) \leq u_2(t)$ pour tout $t \in I$, et de même en remplacer l'inégalité $\leq$ par une égalité ou une inégalité stricte.

Démonstration. S'il existe $t_1 \in I$ tel que $u_1(t_1) = u_2(t_1)$, alors, par unicité des solutions de l'équation différentielle, $u_1(t) = u_2(t)$ pour tout $t \in I$. Sinon, $u_1 - u_2$ est continue et ne s'annule pas ; I étant un intervalle, par le théorème des valeurs intermédiaires, $u_1 - u_2$ est de signe constant, donc du signe de $u_1(t_0) - u_2(t_0)$ sur I. □

Corollaire 2.8.
Soit $a \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$. Soit u une solution sur I de l'équation différentielle

$$y'(t) = a(t)y(t).$$

Soit $t_0 \in I$. Si $u(t_0) \leq 0$, alors $u \leq 0$ (et de même avec une inégalité stricte).

Ce corollaire se déduit ou bien de la formule explicite définissant u, ou bien de l'argument précédent (nettement plus général !) avec $u_1 = u$ et $u_2 = 0$.

2.4.2 Séries entières

Une autre application de l'unicité des solutions d'une équation différentielle est l'identification de fonctions avec leur développement en série entière.

Par exemple, on peut définir la fonction exponentielle comme l'unique solution de l'équation différentielle $y' = y$ telle que $y(0) = 1$. Pour montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!},$$

il suffit de démontrer que la série entière est solution de la même équation différentielle.

Cette méthode peut aussi être utilisée pour obtenir le développement en série entière de la fonction $x \mapsto x^\alpha$ en 1. Celle-ci est en effet l'unique solution de l'équation différentielle définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y'(t) & = & \frac{\alpha y(t)}{t} \\ y(1) & = & 1 \end{array} \right. .$$

Mais on peut aussi utiliser cette équation différentielle pour chercher une solution développable en série entière.

3 La dimension supérieure

Le théorème de Cauchy-Lipschitz reste vrai pour des fonctions à valeurs vectorielles.

Théorème 2 (Théorème de Cauchy-Lipschitz $\mathcal{C}^1$).

Soit $n \geq 1$. Soit $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Soient $t_0 \in \mathbb{R}$ et $y_0 \in \mathbb{R}^n$. Alors il existe une unique solution u de classe $\mathcal{C}^1$ maximale de l'équation différentielle

$$\left\{ \begin{array}{lcl} y' & = & F(t, y(t)) \\ y(t_0) & = & y_0 \end{array} \right. .$$

Cette solution est de plus de classe $\mathcal{C}^2$.

Là encore, un peut remplacer l'hypothèse F *de classe* $\mathcal{C}^1$ par une hypothèse plus faible du type *uniformément localement lipschitzien.*

L'ensemble des solutions est paramétré par $y_0 \in \mathbb{R}^n$, et est donc “de dimension n”.

3.1 La dimension supérieure, équation affines

Le théorème de Cauchy-Lipschitz reste vrai pour des fonctions à valeurs vectorielles.

Théorème 3 (Théorème de Cauchy-Lipschitz $\mathcal{C}^1$).

Soit $n \geq 1$ et I un intervalle réel. Soient $A : I \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $b : I \to \mathbb{R}^n$ deux fonctions continues. Soient $t_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}^n$. Alors il existe une unique solution $u \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^n)$ de l'équation différentielle

$$\left\{ \begin{array}{lcl} y'(t) & = & A(t)y(t) + b(t) \\ y(t_0) & = & y_0 \end{array} \right. .$$

De plus, l'ensemble des solutions sans condition initiale est un espace affine de dimension n, dont la direction est donnée par l'espace des solutions de l'équation homogène.

Remarque 3.1.

En dimension supérieure, le cas affine se déduit du cas linéaire ! Il suffit de rajouter une coordonnée y_{-1}, telle que $y_{-1}(0) = 1$ et $y'_{-1}(t) = 0$. Le terme $b(t)$ peut alors se réécrire $b(t)y_{-1}(t)$. Cette astuce est analogue à celle permettant de plonger le groupe affine de $\mathbb{R}^n$ dans le groupe linéaire de $\mathbb{R}^{n+1}$.

Remarque 3.2.

Dans le cas linéaire, la fonction qui a y_0 associe $y(t)$ est linéaire. En notant $U(t)$ l'application linéaire correspondante, on peut écrire

$$y(t) = U(t)y_0.$$

De plus, la fonction $t \mapsto U(t)$ est l'unique solution de l'équation différentielle

$$\left\{ \begin{array}{lcl} U'(t) & = & A(t)U(t) \\ U(t_0) & = & I \end{array} \right. .$$

3.2 Équations linéaires à coefficients constants

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors l'équation différentielle

$$\left\{ \begin{array}{lcl} y'(t) & = & Ay(t) \\ y(t_0) & = & y_0 \end{array} \right.$$

a pour unique solution maximale la fonction $f(t) = e^{(t-t_0)A}y_0$, définie sur $\mathbb{R}$. Autrement dit, la fonction à valeurs matricielles associée est $U(t) = e^{(t-t_0)A}$.

3.2.1 Autour de l'exponentielle de matrices

L'exponentielle de matrices est définie par la série convergente

$$e^A = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!},$$

et donc $e^{tA} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k A^k}{k!}$.

Remarquons que $e^{P^{-1}AP} = P^{-1}e^A P$. Par conséquent, pour calculer l'exponentielle, de matrice, on peut se ramener à une base adaptée, par exemple une base dans laquelle la matrice est sous forme de Jordan.

On peut aussi procéder, ce qui est similaire, en utilisant la décomposition de Dunford. Si $A = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ est diagonale, alors e^{tA} aussi, et $e^{tA} = \mathrm{Diag}(e^{\lambda_1 t}, \ldots, e^{\lambda_n t})$. Si A est nilpotente, alors $t \mapsto e^{tA}$ est polynômiale : $A^n = 0$, donc

$$e^{tA} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k A^k}{k!} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k A^k}{k!}.$$

Dans le cas général, on peut écrire $A = D + N$ avec D diagonalisable, N nilpotente et $DN = ND$. Comme D et N commutent,

$$e^{tA} = e^{tN} e^{tD} = \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k A^k}{k!} \right) e^{tD},$$

et les coefficients de e^{tA} sont donc de la forme polynôme $\times$ exponentielle.

Exercice 3.3.
Dessiner des orbites des solutions de l'équation différentielle $y' = Ay$ pour diverses matrices 2×2.

Exercice 3.4.
Supposons que A est antisymétrique. Soit y une solution de l'équation différentielle $y'(t) = Ay(t)$. Calculez la dérivée de la fonction $t \mapsto \langle y(t), y(t) \rangle$, et déduisez-en que les solutions de l'équation différentielle prennent leur valeurs dans des sphères.

3.3 Équations linéaires à coefficients variables

Soit $A : I \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une fonction continue. Alors l'équation différentielle

$$\begin{cases} y'(t) & = & A(t)y(t) \\ y(t_0) & = & y_0 \end{cases}$$

a bien une unique solution de classe $\mathcal{C}^1$ définie sur I.

3.3.1 Un problème de commutativité

Attention : Contrairement au cas scalaire, les équations linéaires à coefficients variables n'admettent en général pas de solution simple. La fonction $u(t) = e^{\int_{t_0}^t A(s)\,\mathrm{d}s} y_0$ n'est en général pas solution de l'équation différentielle $y'(t) = A(t)y(t)$. Le problème est que, pour des matrices génériques, $e^{A+B} \neq e^A e^B$, car la multiplication de matrices n'est pas commutative. Par conséquent, en général,

$$e^{\int_{t_0}^{t+h} A(s)\,\mathrm{d}s} = e^{hA(t) + o(h) + \int_{t_0}^t A(s)\,\mathrm{d}s} \neq e^{hA(t)+o(h)} e^{\int_{t_0}^t A(s)\,\mathrm{d}s} = (I + hA(t) + o(h)) e^{\int_{t_0}^t A(s)\,\mathrm{d}s},$$

et donc la dérivée de $t \mapsto e^{\int_{t_0}^t A(s)\,\mathrm{d}s}$ n'est en général pas $A(t)e^{\int_{t_0}^t A(s)\,\mathrm{d}s}$.

Si les matrices $(A(t))_{t\in I}$ commutent entre elles, alors on peut procéder comme dans le cas réel ; cependant, hors du cas important des matrices constantes, cette situation est l'exception plutôt que la règle. Nous renvoyons le lecteur à la particulièrement désagréable formule de Baker-Campbell-Hausdorff,

$$\begin{aligned} e^X e^Y &= e^{X+Y+\frac{[X,Y]}{2}+\frac{[X,[X,Y]]+[Y,[Y,X]]}{12}+\cdots} \\ &= e^{X+Y+\frac{XY-YX}{2}+\frac{X^2Y-2XYX+YX^2+Y^2X-2YXY+XY^2}{12}+\cdots}, \end{aligned}$$

où $[X,Y]=XY-YX$ est le commutateur de X et Y. Ce défaut de commutativité et ses conséquence sur les équations différentielles fait, au passage, tout le sel de la mécanique quantique.

Exemple 3.5.

Donnons un exemple explicite pour lequel la formule $y(t)=e^{\int_{t_0}^t A(s)\,\mathrm{d}s}y_0$ ne convient pas. Considérons l'équation différentielle définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$\begin{cases} u'(t) &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1/t \end{pmatrix} u(t) \\ u(1) &= (0,1) \end{cases}.$$

On calcule directement $y(t)=t$ et, en utilisant la méthode de variation de la constante, $x(t)=2e^{t-1}-1-t$.

De plus, on calcule (plus douloureusement)

$$\int_1^t \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1/s \end{pmatrix} \mathrm{d}s = \begin{pmatrix} (t-1) & (t-1) \\ 0 & \ln(t) \end{pmatrix}, \quad e^{\int_1^t \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1/s \end{pmatrix} \mathrm{d}s} = \begin{pmatrix} e^{t-1} & \frac{(t-1)(e^{t-1}-t)}{t-1-\ln(t)} \\ 0 & t \end{pmatrix},$$

ce qui donne bien $y(t)=t$, mais donne la solution erronée $x(t)=\frac{(t-1)(e^{t-1}-t)}{t-1-\ln(t)}$.

3.3.2 Wronskien

Si la multiplication matricielle n'est pas commutative, on dispose cependant d'un morphisme de $GL_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}^*$: le déterminant. Le groupe multiplicatif $\mathbb{R}^*$ étant commutatif, on peut espérer que le déterminant des matrices $U(t)$ se comporte mieux. Le déterminant se comporte bien vis-à-vis de l'exponentielle : pour toutes matrices X et Y,

$$\det(e^X e^Y) = \det(e^X)\det(e^Y) = e^{\mathrm{Tr}(X)}e^{\mathrm{Tr}(Y)} = e^{\mathrm{Tr}(X)+\mathrm{Tr}(Y)} = e^{\mathrm{Tr}(X+Y)} = \det(e^{X+Y}).$$

Considérons une équation différentielle linéaire à coefficients variables :

$$y'(t) = A(t)y(t).$$

La solution est de la forme $y(t)=U(t)y(t_0)$, où

$$U'(t) = A(t)U(t).$$

Il reste à comprendre le déterminant d'une dérivée. Remarquons que (cela peut se voir à l'aide des dérivées partielles), pour toute matrice $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} \det(I+H) &= 1+\mathrm{Tr}(H)+O(\|H\|^2) \\ \det(M+H) &= \det(M)\det(I+M^{-1}H) = \det(M)+\det(M)\mathrm{Tr}(M^{-1}H)+O(\|H\|^2). \end{aligned}$$

Par la formule de dérivation en chaîne,

$$\begin{aligned}\det(U(t+h)) &= \det(U(t)+hU'(t)+o(h)) = \det(U(t)) + h\det(U(t))\mathrm{Tr}(U'(t)U(t)^{-1}) + o(h),\\ \det(U)'(t) &= \det(U(t))\mathrm{Tr}(U'(t)U(t)^{-1})\\ &= \det(U(t))\mathrm{Tr}(A(t)U(t)U(t)^{-1})\\ &= \mathrm{Tr}(A(t))\det(U(t)).\end{aligned}$$

On obtient finalement

$$\det(U(t)) = e^{\int_{t_0}^t \mathrm{Tr}(A(s))\,\mathrm{d}s}.$$

3.3.3 Wronskien en dimension 2

Soient y_0, z_0 deux conditions initiales et $y(t)$, $z(t)$ les solutions associées. Alors on définit le **wronskien** $W(t) := \det(y(t), z(t)) = \det(U(t))\det(y_0, z_0)$. On peut donc calculer, sous forme intégrale ou avec un peu de chance explicitement, la fonction $t \mapsto \det(y(t), z(t))$.

En particulier, on peut en déduire une relation entre $y_1(t)$, $y_2(t)$, $z_1(t)$ et $z_2(t)$. Supposons que l'on connaît de plus une solution de l'équation différentielle, disons $y(t)$. La fonction $z(t)$ satisfait une équation différentielle à 2 variables ; mais on peut exprimer une variable en fontion de $y(t)$ et du wronskien, et par substitution, en déduire une équation différentielle d'ordre 1 à une variable. On peut ainsi expliciter la deuxième solution $z(t)$.

4 Équations différentielles d'ordre supérieur

Grâce au théorème de Cauchy-Lipschitz en dimension quelconque, on peut aussi traiter des équations différentielles d'ordre plus grand que 1. Considérons par exemple l'équation différentielle

$$y''(t) = -y(t).$$

On introduit une nouvelle variable v, qui est formellement la dérivée de y :

$$y'(t) = v(t).$$

Alors $v'(t) = y''(t) = -y(t)$. L'équation différentielle initiale se réécrit donc

$$\begin{pmatrix} y \\ v \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} v \\ -y \end{pmatrix}.$$

Cette équation a une unique solution étant donnés $y(0)$ et $v(0) = y'(0)$.

Plus généralement, s'il existe une fonction F de classe $\mathcal{C}^1$ telle que

$$y^{(n)} = F(t, y, \ldots, y^{(n-1)}),$$

alors on peut traduire l'équation différentielle d'ordre n en n équations différentielles d'ordre 1, d'où :

Théorème 4 (Théorème de Cauchy-Lipschitz $\mathcal{C}^1$, ordre supérieur)**.**
Soit $n \geq 1$. Soit $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Soient $t_0 \in \mathbb{R}$ et $(y_0, \ldots, y_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$. Alors il existe une unique solution f de classe $\mathcal{C}^n$ maximale de l'équation différentielle

$$\left\{ \begin{array}{lcl} y^{(n)} & = & F(t, y(t), y'(t), \ldots, y^{(n-1)}(t)) \\ y(t_0) & = & y_0 \\ & \vdots & \\ y^{(n-1)}(t_0) & = & y_{n-1} \end{array} \right. .$$

Cette solution est de plus de classe $\mathcal{C}^{n+1}$.

Dans le cas d'équations affines, les adaptations sont les même que précédemment : il suffit que les coefficients de l'équation soient continus, les solutions sont définies sur l'intervalle I de définition des coefficients, et l'espace des solutions est un espace affine de dimension n.
On peut de même résoudre des équations différentielles d'ordre m sur $\mathbb{R}^n$.

4.1 Résolution d'une équation linéaire

Continuons la résolution de l'équation $y'' = -y$. D'après le théorème ci-dessus, étant donnés y_0 et y_1, pour tous $(y_0, y_1) \in \mathbb{R}^2$, il existe une unique solution de l'équation

$$\left\{ \begin{array}{lcl} y'' & = & -y \\ y(0) & = & y_0 \\ y'(0) & = & y_1 \end{array} \right. .$$

Autrement dit, l'espace des solutions de l'équation différentielle $y'' = -y$ forme un plan ; plus généralement, l'espace des solutions d'une équation différentielle d'ordre n sur $\mathbb{R}$ est de dimension n.
La réduction ci-dessus permet de calculer explicitement les solutions d'équations linéaires d'ordre supérieur. Posons

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad U := \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$$

Alors U est solution de l'équation différentielle $U' = AU$. Cette équation différentielle étant linéaire, elle a pour solution maximale $U(t) = e^{tA}U(0)$. Or A est antisymétrique, donc e^{tA} est une matrice de rotation. On peut calculer explicitement :

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix},$$

et donc $y(t) = y(0)\cos(t) + v(0)\sin(t) = y(0)\cos(t) + y'(0)\sin(t)$.
Plus généralement, considérons une équation de degré n à coefficients constants :

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_0 y(t) = 0.$$

Le système d'ordre 1 associé est

$$\begin{pmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(n-2)} \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \ldots & -a_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(n-2)} \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

La matrice A qui apparaît est la **matrice compagnon** du polynôme $P(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_1X + a_0$.

Or P est le polynôme caractéristique de l'équation différentielle linéaire. Ce polynôme est donc égal au polynôme caractéristique de la matrice ! Or, en mettant sous forme de Jordan la matrice A, on sait que les solutions de l'équation différentielle associée sont de la forme polynôme $\times$ exponentielle, ou les coefficients de l'exponentielle sont les valeurs propres de A, donc les racines de son polynôme caractéristique, donc les racines de l'équation caractéristique de l'équation différentielle. On retrouve l'heuristique utilisée pour écrire les solutions d'une telle équation différentielle.

Exercice 4.1.
Utilisez cette méthode pour déterminer toutes les solutions de l'équation différentielle $y'' = 2y' - y$.

Remarque 4.2.
Le plus souvent, les approches usuelles sont souvent nettement plus efficaces pour calculer explicitement les solutions d'une équation différentielle linéaire d'ordre supérieur. Cependant, l'approche matricielle permet de faire le lien entre la présence de termes polynomiaux quand l'équation caractéristique de l'équation différentielle a une racine multiple, et la présence de blocs de Jordan non triviaux dans la matrice A. De plus, elle permet de justifier rigoureusement l'existence et l'unicité des solutions d'une équation différentielle, même non linéaire.

Remarque 4.3.
Les commentaires faits sur les équations linéaires dans $\mathbb{R}^n$ restent toujours valides pour les équations différentielles linéaires d'ordre n ; les solutions de l'équation $y^{(n)}(t) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k(t)y^{(k)}(t) + b(t)$ forment un espace affine de dimension n de $\mathcal{C}^n(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, dont la direction est l'ensemble des solutions de l'équation homogène. Toutes les solutions sont alors définies globalement.

Enfin, nous avons discuté plus tôt de la difficulté de résoudre des équations différentielles linéaires à coefficients variables en dimension supérieure ; la difficulté reste la même pour des équations différentielles linéaires à coefficients variables d'ordre supérieur. Il n'est en général pas possible d'exprimer les solutions de façon élémentaire à partir des fonctions a_k et de leurs primitives, et ce malgré quelques astuces de calcul (wronskien pour des équations d'ordre 2).

4.2 Retour sur le wronskien

Étant donné qu'un équation différentielle linéaire d'ordre supérieur se réduit à un système linéaire d'ordre 1, la méthode du wronskien fonctionne aussi dans ce cadre. Revenons en particulier sur les équations différentielles linéaires d'ordre 2 :

$$y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = 0$$

Étant données deux solutions $y(t)$ et $z(t)$, leur wronskien est défini comme

$$W(t) = \det((y(t), y'(t)), (z(t), z'(t))) = y(t)z'(t) - y'(t)z(t).$$

Celui-ci est solution de l'équation différentielle

$$W'(t) = \mathrm{Tr}(A(t))W(t) = -a(t)W(t) \ ;$$

l'expression de la matrice compagnon simplifiant singulièrement les calculs. Cette équation différentielle peut se retrouver à la main :

$$\begin{aligned}
W'(t) &= y'(t)z'(t) + y(t)z''(t) - y''(t)z(t) - y'(t)z'(t) \\
&= y(t)(-a(t)z'(t) - b(t)z(t)) - (-a(t)y'(t) - b(t)y(t))z(t) \\
&= -a(t)(y(t)z'(t) - y'(t)z(t)) \\
&= -a(t)W(t).
\end{aligned}$$

Ainsi, si on connaît une solution $y(t)$ de l'équation différentielle, on en déduit une relation entre $z'(t)$ et $z(t)$:

$$z'(t) = \frac{W(t) + y'(t)z(t)}{y(t)},$$

et donc une équation différentielle[3] d'ordre 1 satisfaite par z.

4.3 Conditions initiales, conditions au bord

La solution y d'une équation différentielle d'ordre n satisfaisant les conditions du théorème de Cauchy est caractérisée par les valeurs $y(t_0)$, ..., $y^{(n-1)}(t_0)$ en un point. On peut parfois rencontrer des informations différentes ; par exemple, étant donnés $y(t_0)$, ..., $y(t_{n-1})$, l'équation différentielle a-t-elle une unique solution ?

Ce problème peut être délicat à résoudre. Par exemple, pour l'équation $y'' = -y$, étant donnés y_0 et y_1 :

- ▷ Il existe une unique solution y telle que $y(0) = y_0$ et $y(\pi/2) = y_1$.
- ▷ Si $y_0 = -y_1$, alors l'équation a une infinité de solutions telles que $y(0) = y_0$ et $y(\pi) = y_1$; si cette condition n'est pas vérifiée, alors il n'y a aucune solution.

Ces énoncés se déduisent du fait que l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y'' = -y$ est l'ensemble $\{A\cos(t) + B\sin(t) \ : \ (A, B) \in \mathbb{R}^2\}$.

5 Contre-exemples

5.1 Dimension de l'espace des solutions et équation de Bessel

Dans l'énoncé du théorème de Cauchy-Lipschitz, il faut que l'équation différentielle puisse être mise sous la forme $y' = F(t, y)$. Ce n'est pas toujours le cas ; en particulier, il arrive de rencontrer des équations du premier ordre de la forme

$$a(t)y'(t) + b(t)y(t) = c(t),$$

qui ne peuvent pas se mettre sous cette forme si a s'annule. Un exemple classique est donné par l'équation de Bessel

$$ty''(t) + y'(t) + ty(t) = 0. \tag{2}$$

Cette équation admet des solutions sur $\mathbb{R}$, mais l'espace de ces solutions est de dimension 1, et non 2 comme on pourrait s'y attendre pour une équation d'ordre 2. En notant J_0 la **fonction de Bessel** du premier ordre :

$$J_0(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^n,$$

l'ensemble des solutions de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ est $\{CJ_0,\ C \in \mathbb{R}\}$. Comme $J_0(0) = 1$, il suffit de fixer la valeur en 0 pour définir une solution.

Sur $\mathbb{R}_+^*$ (ou $\mathbb{R}_-^*$, cependant, l'ensemble des solutions est de dimension 2, mais la plupart des solutions divergent en 0. Une solution linéairement indépendante de J_0 sur $\mathbb{R}_+^*$ est

$$Y_0(x) = \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x\cos(\theta))(e + \ln(2x\sin^2(\theta)))\,\mathrm{d}\theta.$$

On peut aussi concevoir ainsi des équations différentielles d'ordre 1 admettant une infinité de solutions, malgré la donnée d'une condition initiale.

3. Dans laquelle il faut faire attention si y s'annule.

Exercice 5.1.
Montrez que, sur $\mathbb{R}$, les fonctions J_0 et J_0' ne s'annulent jamais au même point.

Remarque 5.2.
On peut appliquer utiliser le wronskien ! Soit z une solution de l'équation de Bessel (2) sur $\mathbb{R}_+^*$. Posons $W(t) := \det((J_0(t), J_0'(t)), (Y_0(t), Y_0'(t)))$. Alors

$$W'(t) = -\frac{1}{t}W(t),$$

et donc $W(t) = \frac{W(1)}{t}$. Par conséquent,

$$J_0(t)Y_0'(t) = \frac{W(1)}{t} + J_0'(t)Y_0(t),$$

ce qui fournit une identité fonctionnelle a priori peu évidente entre Y_0 et J_0.

Exercice 5.3.
À l'aide de la méthode de la variation de la constante, écrire Y_0 sous forme intégrale en ne faisant apparaître que J_0.

5.2 Régularité de l'équation et unicité des solutions

Une autre hypothèse que l'on peut tenter d'affaiblir concerne la régularité de F. Comme nous avons déjà vu, une propriété du type *uniformément localement lipschitzienne* suffit. Des problèmes peuvent apparaître si on travaille avec des fonctions non lipschitziennes, par exemple

$$\left\{ \begin{array}{lcl} y' & = & \sqrt{|y|} \\ y(0) & = & 0 \end{array} \right. .$$

Cette équation admet une infinité de solutions maximales, de la forme

$$\left\{ \begin{array}{lcll} y(t) & = & 0 & \forall t \leq t_0 \\ y(t) & = & \frac{(t-t_0)^2}{4} & \forall t > t_0 \end{array} \right. .$$

Ce type d'exemple n'est pas complètement artificiel, et peut apparaître très occasionnellement en physique (dynamique d'une bille roulant sur la crête d'un demi-cylindre, vidange d'une cuve remplie d'eau). Signalons enfin une très belle construction géométrique d'un tel contre-exemple, utilisant des cercles osculateurs, mentionnée dans le *Mathematical omnibus*, de Fuchs et Tabachnikov, Proposition 10.3.

Exercice 5.4.
Soit $y_0 > 0$. Résolvez l'équation différentielle

$$\left\{ \begin{array}{lcl} y' & = & \sqrt{y} \\ y(0) & = & y_0 \end{array} \right. .$$