Suites réelles : Exercices

Rationnalité, irrationnalité, transcendance

Exercice 1. Sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$ et applications [CAPES 2005] [FGN·Ana1, ex. 1.13] [Moi, TD 1 p. 51] [Ska, ex. 1.15]

1. Soit H un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$ non réduit à $\{0\}$. On note $H' := \{x \in H : x > 0\}$.
   (a) Montrez que H' est non vide. On notera a sa borne inférieure.
   (b) Supposons que $a > 0$. Montrez que $a \in H'$ (et donc que $a = \min H'$), et déduisez-en que $H = a\mathbb{Z}$.
   (c) Supposons que $a = 0$. Montrer que H est une partie dense de $\mathbb{R}$.
2. Applications :
   (a) Soient u, v deux réels non nuls tels que u/v soit irrationnel. Montrez que $u\mathbb{Z} + v\mathbb{Z}$ est un sous-groupe dense de $\mathbb{R}$.
   (b) Soit $r \in \mathbb{Q}^*$. Déduisez-en que $\{\cos(rn) \;:\; n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $[-1, 1]$.
   (c) Montrez que l'ensemble des rationnels décimaux inversibles (dans $\mathbb{D}$) est dense dans $\mathbb{R}$.
3. Variante et applications :
   (a) Soient u, v deux réels strictement positifs tels que u/v soit irrationnel. Montrez que $u\mathbb{N} - v\mathbb{N} = \{mu - nv \;:\; (m, n) \in \mathbb{N}^2\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
   (b) Soit $r \in \mathbb{Q}^*$. Déduisez-en que $\{\sin(rn) \;:\; n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $[-1, 1]$.
   (c) Soient c_1, ..., $c_q \in \{0, \ldots, p\}$ avec $c_1 \neq 0$. Montrez qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que l'écriture en base 10 de 2^p commence par les chiffres c_1, ..., c_p.

Exercice 2. Nombres de Liouville [FGN·Alg1, ex. 5.55] [Mon, P. 4.2 p. 283] [Ska, ex. 1.4]

1. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ un irrationnel et $P \in \mathbb{Z}[X]$ un polynôme à coefficients entiers tels que $P(x) = 0$. Soit d le degré de P. Montrez qu'il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tous $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$,
$$\left| x - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{C}{q^d}.$$
2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\{0, \ldots, 9\}$. Montrez que le réel $u = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n 10^{-n!}$ est transcendant.
3. Déduisez-en que l'ensemble des réels transcendants n'est pas dénombrable [1].

Suites réelles

Exercice 3. Moyenne de Cesàro et applications [Moi, TD 2 p. 54] [Ska, ex. 1.9]

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On lui associe une suite réelle $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par
$$v_0 := u_0 \text{ et } v_n := \frac{u_0 + \ldots + u_{n-1}}{n} \quad \forall n \geq 1.$$
   (a) Montrez que, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ, alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge aussi vers ℓ.

1. Cette conclusion peut se démontrer beaucoup plus vite, mais de façon non constructive, en démontrant que les réels algébriques sont dénombrables.

(b) Donnez un exemple de suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ non convergente telle que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

(c) Application : Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle et $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que $a_{n+1} - a_n \to_{n\to+\infty} \lambda$. Montrez que $\frac{a_n}{n} \to_{n\to+\infty} \lambda$.

2. Extension. Soit $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs tels que $S_n := \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \to_{n\to+\infty} +\infty$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On lui associe une suite réelle $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$v_n := \frac{1}{S_n} \sum_{k=0}^{n} \alpha_k u_k \quad \forall n \geq 0.$$

(a) Montrez que, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ, alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge aussi vers ℓ.

(b) Montrez que, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $+\infty$, alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge aussi vers $+\infty$.

(c) Montrez que, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge aussi vers ℓ.

Exercice 4. Valeurs d'adhérence d'une suite [FGN·Ana1, ex. 2.19] [Moi, TD 4 p. 59] [Ska, ex. 1.12 et 3.17]

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle bornée, et V l'ensemble de ses valeurs d'adhérence.

(a) Montrez que, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a une unique valeur d'adhérence x_0, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x_0.

(b) Montrez que, si $(u_{n+1} - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0, alors V est un intervalle.

2. Soient $a < b$ deux réels et $f : [a, b] \to [a, b]$ continue. Soit $x_0 \in [a, b]$. On définit par récurrence une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$u_0 := x_0 \text{ et } u_{n+1} := f(u_n) \quad \forall n \geq 0.$$

Montrez que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si $(u_{n+1} - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

3. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles tendant vers $+\infty$ et telles que $u_n - v_n \to_{n\to+\infty} 0$. Montrez que $A := \{u_m - v_n \ : \ (m, n) \in \mathbb{N}^2\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Étude de suites

Exercice 5. Méthode des isopérimètres [FGN·Ana1, ex. 2.42]
Soit P un polygone régulier à 2^n côtés et de périmètre 1. Notons u_n et v_n les rayons des cercles inscrit et circonscrit respectivement.

1. Calculez u_n et v_n pour tout $n \geq 1$. Déterminez u_1 et v_1, et montrez les relations de récurrence

$$\begin{cases} u_{n+1} &= \frac{u_n + v_n}{2}, \\ v_{n+1} &= \sqrt{u_{n+1} v_n}. \end{cases}$$

2. Montrez que les suites $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ sont adjacentes, précisez leur limite commune, et donnez un équivalent en $+\infty$ de $v_n - u_n$.

3. Déduisez-en simplement deux suites adjacentes $(a_n)_{n\geq 1}$ et $(b_n)_{n\geq 1}$ dont la limite est π. Majorez $|a_n - b_n|$ et déterminez un rang n suffisant pour obtenir un encadrement de π à 10^{-20} près.

Exercice 6. Équivalents de suites définies par récurrence
Soit $a > 0$. Soit $f : [0, a] \to [0, a]$ telle que $f(0) = 0$. Soit $x_0 \in (0, a]$. On définit par récurrence une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$u_0 := x_0 \text{ et } u_{n+1} := f(u_n) \quad \forall n \geq 0.$$

1. Supposons pour cette question que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0, a]$, que $f'(0) \neq 0$ et qu'il existe $K \in (0, 1)$ tel que $|f'| \leq K$ sur $[0, a]$. Montrez que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 et donnez un équivalent de $(\ln(u_n))_{n\geq 0}$.
2. Supposons maintenant qu'il existe deux réels $\alpha > 0$ et $p > 1$ tels que :
   ▷ $0 < f(x) < x$ pour tout $x \in (0, a]$;
   ▷ $f(x) =_{0^+} x - \alpha x^p + o(x^p)$.
   Montrez que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0. Déterminez un réel β tel que la suite $v_n := u_{n+1}^\beta - u_n^\beta$ ait une limite réelle non nulle. En utilisant le *lemme de Cesàro*[2], déduisez-en un équivalent de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$.
3. Application : déterminez le comportement asymptotique des suites définies par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \geq 0$,
   ▷ $u_{n+1} = \sin(\lambda u_n)$, avec $\lambda \in [0, 1]$;
   ▷ $u_{n+1} = \int_0^{u_n} \frac{1}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}\, \mathrm{d}t$.

Références

[FGN·Alg1] : *Oraux X-ENS. Algèbre 1.* S. Francinou, H. Gianella, S. Nicolas.
[FGN·Ana1] : *Oraux X-ENS. Analyse 1.* S. Francinou, H. Gianella, S. Nicolas.
[Moi] : *Mathématiques supérieures, Analyse.* J. Moisan, F. Chanet, F. Delmas, N. Tosel.
[Mon] : *Analyse MP.* J.M. Monier.
[Ska] : *Analyse.* G. Skandalis.

2. Voir le deuxième exercice de cette feuille.