Q2)

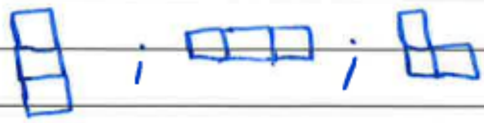
1 - **FAUX** Soit $(M,N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ M, N équivalente $\Leftrightarrow$ $\mathrm{rg}\, M = \mathrm{rg}\, N$

On prend $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

M et N équivalente mais $\mathrm{tr}\, M \neq \mathrm{tr}\, N$

2 - **VRAI** On sait que pour des endomorphismes nilpotents de $\mathbb{R}^3$ notons f et g s'ils sont dans la même classe de similitude ssi ils ont le même tableau de Young

Dans $\mathbb{R}^3$



sont les 3 seuls tableaux de Young possibles

PARTIE À

3- VRAI 1/1 Si A représente un produit scalaire ssi $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$

$^t(A+I) = {}^tA + {}^tI$

$= A+I$

Donc $(A+I) \in S_n(\mathbb{R})$

Théorème spectral $\Rightarrow$ $A \sim \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$

Avec $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in (\mathbb{R}^+)^n$

Donc I n'étant semblable qu'à lui même $A+I \sim \begin{pmatrix} \lambda_1+1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n+1 \end{pmatrix}$

D'où $(A+I) \in S_n^{++}(\mathbb{R})$

4- FAUX (cas général) le théorème de Cartan Dieudonné indique

$f \in O(E) \Rightarrow f$ est la composée de $3 - \dim \ker(f - id)$ réflexions et on ne peut pas faire moins.

Supposons par l'absurde que la composée de trois réflexions est une réflexion

Soit $s \in O(E)$ tq $\ker(s - id)$ est un hyperplan et $s = s_1 o s_2 o s_3$

s_1, s_2, s_3 réflexions

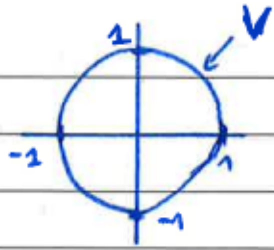
On a $\dim \ker(s - id) = 2$ donc le théorème de Cartan Dieudonné contredit ce point

VRAI (cas trivial) Si on prend 3 fois la même réflexion par exemple

on a $s = s o s o s$

(Je ne sais ce qui était sous entendu ici, sinon incluant le cas trivial)

5. FAUX $V = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2+y^2 = 1\}$



Partiellement si $V = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \vec{V}$

avec $\vec{V}$ sous espace vectoriel $V - \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ est un sous espace vectoriel

Absurde car si $x \in \vec{V}$ $\left| \begin{array}{l} \lambda x \notin \vec{V} \\ \lambda \in \mathbb{R} \end{array} \right.$ $\Big)$ À rendre plus rigoureux