Partiel

Exercice 2, question 5

On cherche une base $\mathcal{B}$ telle que la matrice $P^{-1}AP$ dans la nouvelle base soit

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \Leftrightarrow P^{-1}\underbrace{(A-2I)}_{B}P = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} v & Bv & B^2v & w \end{matrix} \end{array}$$

Cela revient à trouver :

* un vecteur v tel que $(A-2I)^2 v \neq 0$;
* un vecteur $w \in \mathrm{Ker}\,(A-2I)$, $w \notin \mathrm{Vect}\,(v, Bv, B^2v)$.

La base (v, Bv, B^2v, w) conviendra.

On $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Donc $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ convient.

Alors $Bv = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $B^2 v = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Finalement, $w = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}\,(B)$, $w \notin \mathrm{Vect}\,(v, Bv, B^2v)$.

Donc la base $\mathcal{B} = (v, Bv, B^2v, w)$ convient. La matrice de passage est :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$