Question 4

On note $F=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4, x+y=5\}$ et ~~$G=\{(s+t+1, s+2t$~~

et $G=\{(-s+t+1, s+2t, t, s-1), (s,t)\in\mathbb{R}^2\}$

1) Notons $\varphi : (x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 \longmapsto x+y\in\mathbb{R}$, forme linéaire.

Alors on a $F=(5,0,0,0)+\ker\varphi$

Or, les hyperplans sont exactement les noyaux des formes linéaires non triviales (dont φ n'en est pas car $\varphi\neq 0$)

$\boxed{\text{Donc } F \text{ est un hyperplan (translaté)}}$

2) Par linéarité, en notant $u=(-1,1,0,1)$ et $v=(1,2,1,0)$, on a

$G=\{su+tv+(1,0,0,-1), (s,t)\in\mathbb{R}^2\}$

$=(1,0,0,-1)+\text{Vect}(u,v)$

Or, u et v sont manifestement libres (voir dernière coordonnée)

~~Donc $\dim(G)=\dim$~~ Donc $\dim(\text{Vect}(u,v))=2$.

Or, ceci est la représentation d'un sous espace affine.

Donc, G est un sous espace affine de dimension 2 de direction $Vect(u,v)$ avec $u=(-1,1,0,1)$ et $v=(1,2,1,0)$, base de cette direction.

3) On suppose que $F \cap G$ est non vide.

Comme intersection de sous espaces affines, il s'agit d'un sous espace affine.

~~Comme F est un hyperplan, un supplémentaire de celui-ci est de dimension 1~~

Sa direction est en fait l'intersection des directions de F et de G.

Comme F est un hyperplan, un supplémentaire de celui-ci est de dimension 1

Comme $\vec{G}$ est de dimension 2, il ne peut alors pas être en somme directe avec F : $F \cap \vec{G}$ est dimension 1 ou 2

0,25 ??

Donc $F \cap G$ est un sous espace affine de $\mathbb{R}^4$ de dimension 1 ou 2.

4) Montrons que $F \cap G$ est non vide

~~Notons~~ Soit $g \in G$. Il existe $(s,t) \in \mathbb{R}^2$ tels que $g = (-s+t+1, s+2t, t, s-1)$

On a que $g \in F$ si et seulement si $(-s+t+1)+(s+2t)=5$
$\Leftrightarrow 3t+1=5$
$\Leftrightarrow t=\frac{4}{3}$

On observe qu'en prenant $t=\frac{4}{3}$ et $s \in \mathbb{R}$ quelconque, on obtient un vecteur qui convient. On a

$G \cap F = \{(-\lambda+\frac{7}{3}, \lambda+\frac{8}{3}, \frac{4}{3}, \lambda-1),\ \lambda \in \mathbb{R}\}$

Soit aussi $G \cap F = \mathbb{R}\cdot(-1,1,0,1) + \left(\frac{7}{3}, \frac{8}{3}, \frac{4}{3}, -1\right)$

On cherche une représentation cartésienne de $F \cap G$.

Il suffit de trouver 3 formes linéaires linéairement indépendantes qui caractérisent $G \cap F$.

Soit $v = (x,y,z,t) \in G \cap F$. Il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, tels que

$x = -\lambda + \mu + 1$; $y = \lambda + 2\mu$, $z = \mu$, $t = \lambda - 1$

Car $v \in G$, on a

$x + y = 5$

On veut annuler les coefficients de λ et μ. Voici deux manières.

$x + y - 3z = (-\lambda + \mu + 1) + (\lambda + 2\mu) - (3\mu) = 1$

$x + t - z = (-\lambda + \mu + 1) + (\lambda - 1) - (\mu) = 0$

On a bien $\varphi_1 : v \mapsto x + y$, $\varphi_2 : v \mapsto x + y - 3z$, $\varphi_3 : \vec{x} + t - z$ linéairement indépendantes.

$$\boxed{\text{Donc } G \cap F = \left\{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4,\ \begin{array}{l} x + y = 5 \\ x + y - 3z = 1 \\ x - z + t = 0 \end{array} \right\}}$$

Il s'agit d'un sous espace affine de dimension $\underline{1}$