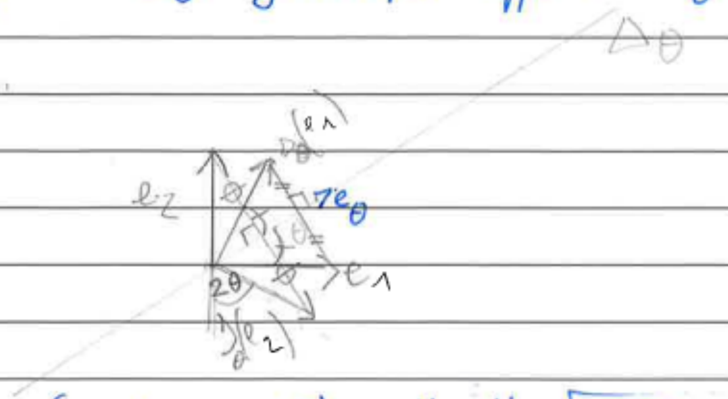
Question 3   1. s_θ réflexion par rapport à Δ_θ



soit $e_\theta = (\cos\theta, \sin\theta)$ $\quad \|e_\theta\| = \sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = 1$

et e_θ engendre Δ_θ et en est une base orthonormée

de même, $e_\theta^T = (\sin\theta, -\cos\theta)$, $\quad \|e_\theta^T\| = 1$

et $\langle e_\theta, e_\theta^T \rangle = \cos\theta \sin\theta - \sin\theta \cos\theta = 0$

donc e_θ^T engendre Δ_θ^T et en est une base orthonormée

$s_\theta(e_1) = (\cos(2\theta), \sin(2\theta))$ par le dessin

$= (\cos^2\theta - \sin^2\theta, 2\sin\theta\cos\theta)$

et $s_\theta(e_2) = \left(\cos\left(-\frac{\pi}{2} + 2\theta\right), \sin\left(-\frac{\pi}{2} + 2\theta\right)\right)$

$$= \left(\underbrace{\cos\left(-\tfrac{\pi}{2}\right)}_{0}\cos(2\theta) - \underbrace{\sin\left(-\tfrac{\pi}{2}\right)}_{-1}\sin 2\theta, \ \underbrace{\sin\left(-\tfrac{\pi}{2}\right)}_{-1}\cos(2\theta) + \underbrace{\cos\left(-\tfrac{\pi}{2}\right)}_{0}\sin(2\theta)\right)$$

$= (\sin 2\theta, -\cos(2\theta))$

$= (2\sin\theta\cos\theta, -\cos^2\theta + \sin^2\theta)$

(suite de la question 3)

2. Soit B_{can} la base canonique (e_1, e_2)

$$\underset{B_{can}}{\mathrm{Mat}}\, s_\theta = \left(s_\theta(e_1) \;\middle|\; s_\theta(e_2) \right)$$

$$= \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix}$$

ℓ2 △θ

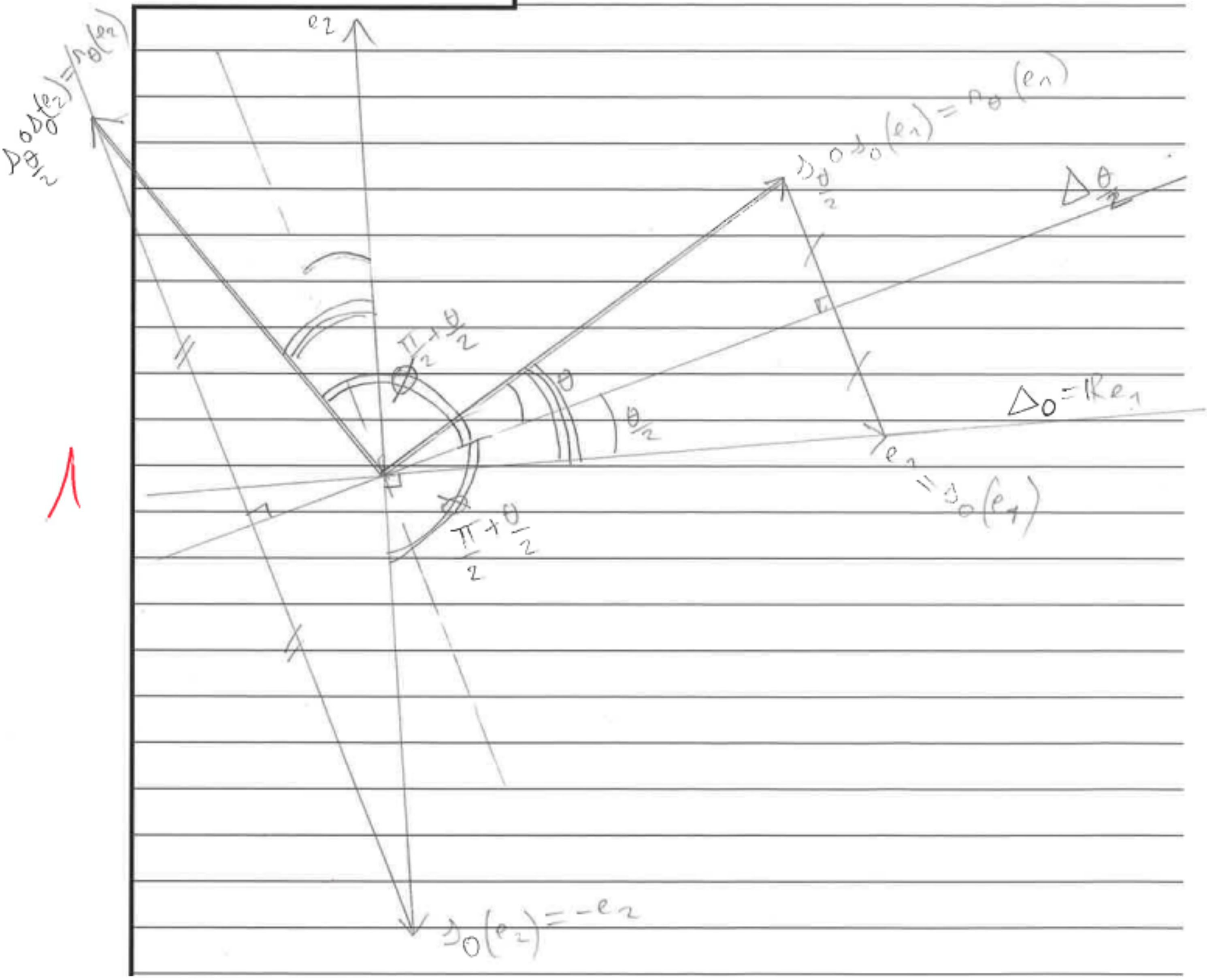
PARTIE À RABATTRE

Soit r_θ la rotation d'angle θ,

$s_{\frac{\theta}{2}}$ la symétrie d'axe $\Delta_{\frac{\theta}{2}} = \mathbb{R}\left(\cos\frac{\theta}{2}, \sin\frac{\theta}{2}\right)$

et s_0 la symétrie d'axe $\Delta_0 = \mathbb{R}(1,0)$

dans la base $\mathcal{B}_{can} = (e_1, e_2)$



Par le dessin, on a $s_{\frac{\theta}{2}} \circ s_0 (e_1) = r_\theta (e_1)$

et $s_{\frac{\theta}{2}} \circ s_0 (e_2) = r_\theta (e_2)$

une application linéaire étant totalement déterminée par son action sur une base,

on a déterminé r_θ et

$$\underset{B_{can}}{\mathrm{Mat}}\, r_\theta = \underset{B_{can}}{\mathrm{Mat}}\, s_{\frac{\theta}{2}} \circ s_0$$

$$= \underset{B_{can}}{\mathrm{Mat}}\, s_{\frac{\theta}{2}} \times \underset{B_{can}}{\mathrm{Mat}}\, s_0$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

de plus on a $\underset{B_{can}}{\mathrm{Mat}}\, r_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$