0,75

Ex3.

1) a). $e_1=(1,1,0)$ $e_2=(-1,1,1)$ $e_3=(1,-1,1)$. $F=\mathrm{Vect}(e_2,e_3)$

$\langle e_1,e_2\rangle=-1+1=0$, $\langle e_1,e_3\rangle=1-1=0$ $\Rightarrow$ $e_1\perp e_2$, $e_1\perp e_3$ $\Rightarrow$ $e_1\in F^\perp$, alors $F=\mathrm{Vect}(e_1)^\perp$

$F:\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ x+y=0\}$.

$\boxed{\text{donc } F=\mathrm{Vect}(e_1)^\perp \quad F:\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ x+y=0\}}$

0,25

b). S la réflexion par rapport au plan $\{x=0\}$. $T=$ un plan $\{x=0\}$ et $T=\mathrm{Vect}\left(\overset{T_1}{\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}},\overset{T_2}{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}}\right)$

la projection orthogonal de T est $P_T: X\mapsto \langle X|T_1\rangle T_1+\langle X|T_2\rangle T_2$. avec $T_1=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$. $T_2=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$.

et $Id=2P-S$. $\Rightarrow$ $S=\cancel{Id-2P}$ $2P-Id$ $\Rightarrow$ $S_T=X-2\langle X|T_1\rangle T_1-2\langle X|T_2\rangle T_2$. pour $X=(x,y,z)$.

on a $S_T=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}0\\y\\0\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}0\\0\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\-y\\-z\end{pmatrix}$ $\begin{matrix}-x\\y\\z\end{matrix}$

$\Rightarrow S(F)=x-y=0$.

$\boxed{\text{donc } S(F)= x-y=0}$

1

c). $B_1=\frac{e_1}{\|e_1\|}=\frac{\sqrt2}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ $B_2=$ on pose $t_1=\frac{e_2}{\|e_2\|}=\frac{\sqrt3}{3}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$ $e_3=(1,-1,1)$.

$t_2'=e_3-\langle e_3,t_1\rangle t_1=(1,-1,1)+\frac{3}{9}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}=\frac{2}{3}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$. $t_2=\frac{t_2'}{\|t_2'\|}=\frac{\sqrt6}{6}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$

$\boxed{\text{donc } B_1=\left(\frac{\sqrt2}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right),\ B_F=\left(\frac{\sqrt3}{3}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix},\frac{\sqrt6}{6}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}\right)}$

$B' =$ base canonique

d). on peut mettre la matrice de Passage $P_{BB'} = (B, B_F) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$

A est la matrice dans B ; D est la matrice dans B'

0

$\boxed{\text{donc } A = PDP^{-1}}$

2) a). $f : x \longmapsto x - \frac{2}{3}\langle e_2 . x\rangle e_2$

on va montrer $\langle f(x) . f(x)\rangle = \langle x . x\rangle \Rightarrow \langle x - \frac{2}{3}\langle e_2 . x\rangle e_2 , x - \frac{2}{3}\langle e_2 . x\rangle e_2\rangle$

$= \langle x . x\rangle - \langle x . \frac{2}{3}\langle e_2 . x\rangle e_2\rangle - \langle x . \frac{2}{3}\langle e_2 . x\rangle e_2\rangle + \frac{4}{9}\langle\langle e_2 . x\rangle e_2 , \langle e_2 . x\rangle e_2\rangle$

$= \langle x . x\rangle - \frac{4}{9}\|\langle e_2 . x\rangle e_2\|^2 + \frac{4}{9}\|\langle e_2 . x\rangle e_2\|^2$

0,5 $= \langle x . x\rangle$

donc f est une isométrie.

et $f : x \mapsto x - 2(\frac{1}{3}\langle e_2 . x\rangle e_2)$ et $\frac{1}{3}\langle e_2 . x\rangle e_2$ est la projection orthogonal par rapport à e_2.

$f = x - 2P_{e_2}$ et $I_d = 2P - S$ $\Rightarrow$ f est la symétrie orthogonal par rapport à e_2 ?

$\boxed{\text{donc } f \text{ est une isométrie et } f \text{ est la symétrie orthogonal par rapport à } e_2}$

b). $e_1' = (1.0.0)$ $e_2' = (0.1.0)$ $e_3' = (0.0.1)$

on met $f(e_1) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ $f(e_2) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ $f(e_3) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

donc $\mathrm{Mat}_B(f) = \frac{1}{3}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$ on va voir les colonnes forment une base orthonormé

$\|f(e_1)\| = 1 = \|f(e_2)\| = 1 = \|f(e_3)\| = 1$

1 et $\langle f(e_1) . f(e_2)\rangle = 0$ $\langle f(e_1) , f(e_3)\rangle = 0$ $\langle f(e_2) . f(e_3)\rangle = 0$

donc $(f(e_1) . f(e_2)\ f(e_3))$ est une base orthonormé $\rightarrow f$ est isométrie

$\boxed{\text{donc } \mathrm{Mat}_B(f) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } f \text{ est isométrie}}$

c). et g est aussi une symétrie. $\Rightarrow$ $g \circ f$ n'est pas une symétrie. car $\det(g \circ f) = 1 \neq -1$.

$\rangle e_2$.

$\langle g \circ f(x) . g \circ f(x)\rangle = \langle g(x) . g(x)\rangle$ et g est aussi un isométie comme f

1 alors $\langle g(x) . g(x)\rangle = \langle x . x\rangle$. $\frac{1}{2}$.

donc $g \circ f$ est une isométrie.

donc $g \circ f$ est la rotation, $g \circ f$ est isométrie positive