Exercice 2 :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -4 & 0 \\ -1 & 2 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

1) $\chi_A = \det(X I_n - A)$

PARTIE A

$$\chi_A = \begin{vmatrix} X-4 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & X-2 & -5 & -1 \\ -1 & 0 & X & 0 \\ 1 & 0 & -2 & X-2 \end{vmatrix}$$

$$= (X-2)\begin{vmatrix} X-4 & 4 & 0 \\ -1 & X & 0 \\ 1 & -2 & X-2 \end{vmatrix}$$

$$= (X-2)^2 \begin{vmatrix} X-4 & 4 \\ -1 & X \end{vmatrix}$$

$$= (X-2)^2 (X(X-4)+4)$$

$$= (X-2)^2 (X^2-4X+4)$$

$$= (X-2)^4$$

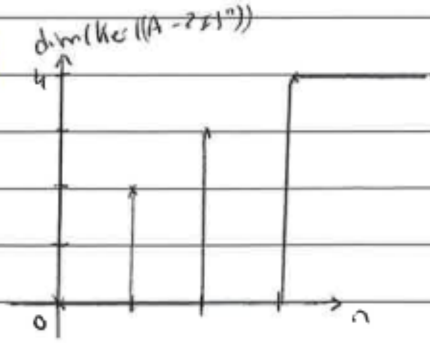
Donc 2 est l'unique valeur propre de A de multiplicité 4.

2) $A-2I = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 & 0 \\ -1 & 0 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ $\qquad (A-2I)^0 = I_4$

$$(A-2I)^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 & 0 \\ -1 & 0 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\forall n \geq 3, \ (A-2I)^n = 0_4$

3) $A-2I$ est nilpotente d'indice 3



$\text{Dim Ker}((A-2I)^0) = 0$

$\text{Dim Ker}((A-2I)^1) = 2$

$\text{Dim Ker}((A-2I)^2) = 3$

$\forall n \geq 3, \ \dim \text{Ker}((A-2I)^n) = 4$

En effet $rg(A-2I) = 2$ car $L_1 = 2L_3 = -2L_4$
et L_3 et L_2 sont libres.
$rg((A-2I)^2) = 1$ car 3 lignes de 0.

Tableau d'Young associé à $A-2I$.

car $\dim(\mathrm{Ker}(A-2I)) = 2$
et elle est nilpotente d'indice 3.

4) forme de Jordan de $A-2I$: $\begin{pmatrix} J_3 & \\ & J_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0&0&0&0 \\ 1&0&0&0 \\ 0&1&0&0 \\ 0&0&0&0 \end{pmatrix}$

Donc $J = \begin{pmatrix} 2 & & & \\ 1 & 2 & 0 & \\ 0 & 1 & 2 & \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$