Examen partiel

Le 28 octobre 2022

Durée : 3 heures

La note tiendra compte du soin et de la qualité de l'expression écrite.
Les réponses non argumentées ne rapportent aucun point.
Les calculatrices ne sont pas autorisées.
Tous les exercices sont indépendants (barême approximatif indiqué).

1 Questions de cours (11 points)

Question 1. (1 point)
Reformulez la phrase suivante en utilisant un formalisme mathématique.
"Un endomorphisme qui préserve la norme préserve le produit scalaire."

Question 2. (5 points)
Répondez par vrai ou faux et argumentez à l'aide d'une démonstration ou un contre-exemple.

1. La trace est un invariant d'équivalence.
2. Il y a exactement 3 classes de similitude d'endomorphismes nilpotents de $\mathbb{R}^3$.
3. Si A est une matrice représentant un produit scalaire, alors $A + I$ aussi.
4. Dans $\mathbb{R}^3$, un endomorphisme qui est la composée de 3 réflexions n'est jamais une réflexion.
5. L'ensemble $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 = 1\}$ est un sous-espace affine de $\mathbb{R}^2$.

Question 3. (2,5 points)
On se place dans $\mathbb{R}^2$ muni de sa base canonique $(e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1))$ et du produit scalaire usuel. On note Δ_θ la droite vectorielle dirigée par le vecteur $(\cos(\theta), \sin(\theta))$.

1. Soit s_θ la réflexion par rapport à Δ_θ. À l'aide d'un dessin, déterminez les coordonnées des vecteurs $s_\theta(e_1)$ et $s_\theta(e_2)$.
2. Déduisez-en la matrice de s_θ dans la base canonique.
3. Montrez qu'une matrice de rotation est produit de deux matrices de réflexions que l'on explicitera. Un dessin est fortement recommandé.

Question 4. (2,5 points)
On note $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, \ x + y = 5\}$ et $G = \{(-s + t + 1, s + 2t, t, s - 1), (s, t) \in \mathbb{R}^2\}$.

1. Pourquoi F est-il un hyperplan ?
2. Montrez que G est un sous-espace affine de dimension 2. Explicitez une base de sa direction.
3. Supposons que $F \cap G$ est non vide. Justifiez sans calcul que $F \cap G$ est un sous-espace affine de $\mathbb{R}^4$ de dimension au moins 1.
4. Montrez que $F \cap G$ est non vide et donnez-en une représentation cartésienne. Quelle est la dimension de $F \cap G$?

2 Exercices (9 points)

Exercice 1. (2,5 points)
Soit f un endomorphisme nilpotent de $\mathbb{R}^3$.

1. Montrez que f^2 est nilpotent.
2. Combien y a-t-il de formes de Jordan possibles pour f ? On donnera pour chacune de ces formes un représentant matriciel et le tableau de Young associé.

3. Combien y a-t-il de formes de Jordan possibles pour f^2 ? Donnez les tableaux de Young associés.

Exercice 2. (2,5 points)
Soit A la matrice suivante :

$$A := \begin{pmatrix} 4 & 0 & -4 & 0 \\ -1 & 2 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Montrez que 2 est l'unique valeur propre de A.
2. Calculez $(A - 2I)^n$ pour tout $n \geq 0$.
3. Calculez $\dim(\mathrm{Ker}((A - 2I)^n))$ pour tout $n \geq 0$. Déduisez-en un tableau de Young associé à $A - 2I$.
4. Donnez la forme de Jordan J de A.
5. (*) Déterminez une matrice P telle que $J = P^{-1}AP$.

Exercice 3. (4 points)
On se place dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne canonique. On note $e_1 = (1, 1, 0)$, $e_2 = (-1, 1, 1)$, $e_3 = (1, -1, 1)$, et $F = \mathrm{Vect}(e_2, e_3)$.

1. (a) Montrez que $F = \mathrm{Vect}(e_1)^{\perp}$. Déduisez-en une équation cartésienne de F.
   (b) Soit s la réflexion par rapport au plan $\{x = 0\}$. Déterminez une équation cartésienne de $s(F)$.
   (c) Déterminez une base orthonormée $\mathcal{B}_1$ de $\mathrm{Vect}(e_1)$ et une base orthonormée $\mathcal{B}_F$ de F.
   (d) Soit $\mathcal{B}$ la base de $\mathbb{R}^3$ obtenue en prenant l'union de $\mathcal{B}_1$ et de $\mathcal{B}_F$. Comment obtenir les coordonnées d'un vecteur dans la base $\mathcal{B}$ si l'on connaît ses coordonnées dans la base canonique ?
2. (a) Soit $f : x \mapsto x - \frac{2}{3}\langle e_2, x\rangle e_2$. Montrez que f est une isométrie et précisez sa nature.
   (b) Écrivez la matrice de f dans la base canonique. Comment peut-on re-démontrer que f est une isométrie à l'aide de cette écriture matricielle ?
   (c) Soit $g : x \mapsto x - \frac{2}{3}\langle e_3, x\rangle e_3$. Montrez que $g \circ f$ est une isométrie et précisez sa nature géométrique.
3. (*) Après avoir écrit sa matrice dans une base bien choisie, trouvez la forme de Jordan de l'endomorphisme $h : x \mapsto x + \langle e_2, x\rangle e_1$.