

**Interrogation 5 : Transformations affines, Formes bilinéaires**

Durée : 30 minutes - 4 questions.

Le 6 décembre 2022

**Question 1.** On se donne un espace vectoriel réel  $E$ . On notera  $L_2(E)$  l'espace vectoriel des formes bilinéaires sur  $E$ , et  $Q(E)$  des formes quadratiques sur  $E$ . Reformuler la phrase suivante en utilisant un formalisme mathématique, *et en faisant particulièrement attention aux quantificateurs* : "La forme quadratique associée à une forme bilinéaire antisymétrique sur  $E$  est nulle."

.....  
.....  
.....  
.....

**Question 2.** Répondre par vrai ou faux et argumenter par une démonstration ou un contre-exemple.

1. Une forme bilinéaire  $\varphi$  sur  $E$  est symétrique si et seulement si, pour tous  $x, y \in E$ , on a  $\varphi(x, y) = \varphi(x, -y) = \varphi(-x, y)$ .

.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....

2. Dans le plan euclidien, la composée de deux symétries axiales est une translation.

.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....

**Question 3.** On se place dans le plan affine euclidien. Soit  $r_\theta$  une rotation de centre  $P$  et d'angle  $\theta \neq 0$ , et  $t_{\vec{u}}$  une translation de vecteur  $\vec{u}$ . Montrez soigneusement que  $t_{\vec{u}} \circ r_\theta$  est une rotation dont on précisera l'angle.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Question 4.**

1. On se place dans  $\mathbb{R}^2$ , muni de sa base et de son produit scalaire canoniques. Soit  $r_\theta$  la rotation d'angle  $\theta$ . Écrire la forme bilinéaire associée à  $r_\theta$ , puis la forme quadratique associée.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2. Soit  $q(x, y, z) = -x^2 + 3yz + z^2$  une forme quadratique de  $\mathbb{R}^3$ . Écrire la forme bilinéaire symétrique associée, ainsi que sa matrice dans la base canonique.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

3. Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}$ . Écrire la forme quadratique associée, puis la matrice symétrique représentant cette forme quadratique. Comment calculer directement cette matrice ?

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....