

Interrogation 5 : Transformations affines, Formes bilinéaires

Durée : 30 minutes - 4 questions.

Le 6 décembre 2022

Question 1. On se donne un espace vectoriel réel E . On notera $L_2(E)$ l'espace vectoriel des formes bilinéaires sur E , et $Q(E)$ des formes quadratiques sur E . Reformuler la phrase suivante en utilisant un formalisme mathématique, *et en faisant particulièrement attention aux quantificateurs* : "La forme quadratique associée à une forme bilinéaire antisymétrique sur E est nulle."

.....
.....
.....
.....

Question 2. Répondre par vrai ou faux et argumenter par une démonstration ou un contre-exemple.

1. Une forme bilinéaire φ sur E est symétrique si et seulement si, pour tous $x, y \in E$, on a $\varphi(x, y) = \varphi(x, -y) = \varphi(-x, y)$.

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

2. Dans le plan euclidien, la composée de deux symétries axiales est une translation.

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3. On se place dans le plan affine euclidien. Soit r_θ une rotation de centre P et d'angle $\theta \neq 0$, et $t_{\vec{u}}$ une translation de vecteur \vec{u} . Montrez soigneusement que $t_{\vec{u}} \circ r_\theta$ est une rotation dont on précisera l'angle.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Question 4.

1. On se place dans \mathbb{R}^2 , muni de sa base et de son produit scalaire canoniques. Soit r_θ la rotation d'angle θ . Écrire la forme bilinéaire associée à r_θ , puis la forme quadratique associée.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2. Soit $q(x, y, z) = -x^2 + 3yz + z^2$ une forme quadratique de \mathbb{R}^3 . Écrire la forme bilinéaire symétrique associée, ainsi que sa matrice dans la base canonique.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

3. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}$. Écrire la forme quadratique associée, puis la matrice symétrique représentant cette forme quadratique. Comment calculer directement cette matrice ?

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....