

**Interrogation 2 : Classes de similitudes**

Durée : 30 minutes - 4 questions.

Le 27 septembre 2022

**Question 1.** Reformuler la phrase suivante en utilisant un formalisme mathématique : “Le noyau d’un endomorphisme nilpotent n’est pas trivial.”

.....  
.....  
.....  
.....

**Question 2.** Répondre par vrai ou faux et argumenter par une démonstration ou un contre-exemple.

1. Une somme de matrices nilpotentes est nilpotente.

.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....

2. Deux matrices  $n \times n$  de projection ayant la même trace sont semblables.

.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....

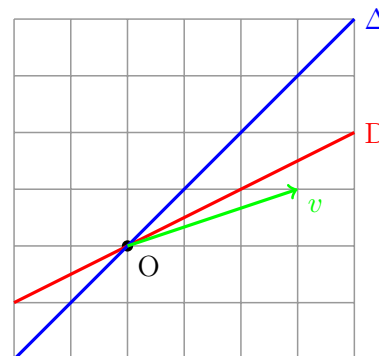
**Question 3.** On se place dans le plan euclidien muni d'un repère orthonormé. Soient  $p$  la projection orthogonale sur  $D = \text{Vect}((2, 1))$  et  $s$  la symétrie orthogonale d'axe  $\Delta = \text{Vect}((1, 1))$ . Soit  $v$  le vecteur de coordonnées  $(3, 1)$ .

1. Construisez géométriquement  $s \circ p \circ s^{-1}(v)$ , en indiquant chaque étape.

.....  
 .....  
 .....  
 .....  
 .....

2. Décrivez la transformation  $s \circ p \circ s^{-1}$ , en justifiant votre réponse.

.....  
 .....  
 .....  
 .....  
 .....  
 .....



**Question 4.** Soient  $E$  un espace vectoriel et  $f \in L(E)$ .

1. Soient  $v \in \text{Ker}(f^2) \setminus \text{Ker}(f)$  et  $w \in \text{Ker}(f) \setminus \text{Vect}(f(v))$ . Montrez que  $(v, f(v), w)$  est libre. En supposant que  $\dim(E) = 3$ , écrivez la matrice de  $f$  dans cette base.

.....  
 .....  
 .....  
 .....  
 .....  
 .....

2. Si  $\dim(E) = 4$ , combien y a-t-il de classes de similitude de matrices nilpotentes dans  $L(E)$ ? Explicitez une matrice dans chacune de ces classes.

.....  
 .....  
 .....  
 .....  
 .....  
 .....