Chapitre 3

Espaces et applications affines.

Ces notes ont été rédigées par Mélanie GUENAIS (2020-2022), et reprises par Damien THOMINE (2022-2023).

Ce texte contient de nombreux passages en gris. Ceux-ci pourront-être passé en première lecture. Ces passages contiennent cependant de nombreuses démonstrations ; s'il n'est pas important (ni souhaitable) de les apprendre, cela peut être un exercice instructif d'essayer de les faire soi-même.

I Systèmes d'équations affines

Dans cette partie, $\overrightarrow{E}$ est un espace vectoriel [1] de dimension n.

I.1 Équations paramétriques et cartésiennes de sous-espaces vectoriels

Un sous-espace vectoriel est souvent donné sous l'une des deux formes suivantes :

- ▷ sous forme paramétrique, c'est-à-dire comme ensemble des combinaisons linéaires de certains vecteurs ;
- ▷ sous forme cartésienne, c'est-à-dire comme ensemble des vecteurs satisfaisant certaines équations linéaires.

La première méthode revient à écrire un certain sous-espace $\overrightarrow{V}$ comme image d'un morphisme, et la deuxième méthode comme noyau d'un morphisme. Nous allons détailler ces deux points de vue.

Représentation paramétrique

Définition I.1 (Représentation paramétrique d'un sous-espace vectoriel).

*Soit $\overrightarrow{V}$ un sous espace vectoriel de $\overrightarrow{E}$. On appelle **équation paramétrique** ou **représentation paramétrique** de $\overrightarrow{V}$ la description de ce sous-espace comme ensemble des combinaisons linéaires d'une famille libre de vecteurs $(a_1, \cdots, a_k)$:*

$$\overrightarrow{V} = \left\{ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i a_i,\ (\lambda_1, \cdots, \lambda_k) \in \mathbb{R}^k \right\}.$$

1. Dans le cadre ce ce chapitre, sur $\mathbb{R}$, mais on pourra remplacer $\mathbb{R}$ par n'importe quel corps : $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{Q}$, et bien d'autres.

Les scalaires λ_1, ..., λ_k sont les ***paramètres*** *de la représentation paramétrique de $\overrightarrow{V}$.*

Remarque I.2.

Dans le cadre de la Définition I.1, on a de plus $\dim(\overrightarrow{V}) = k$.

Plus généralement, si $(a_1, \cdots, a_k)$ est une famille de vecteurs de $\overrightarrow{E}$, alors

$$\overrightarrow{V} = \left\{ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i a_i,\ (\lambda_1, \cdots, \lambda_k) \in \mathbb{R}^k \right\}.$$

est un sous-espace vectoriel de $\overrightarrow{E}$, mais, dans le cadre de ce cours, l'écriture correspondante n'est pas nécessairement une représentation paramétrique de $\overrightarrow{V}$: il se peut que la famille $(a_1, \cdots, a_k)$ ne soit pas libre, auquel cas $\dim(\overrightarrow{V}) < k$.

Une représentation paramétrique consiste à écrire $\overrightarrow{V}$ comme image du morphisme

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathbb{R}^k & \to & \overrightarrow{E} \\ (\lambda_1, \cdots, \lambda_k) & \mapsto & \sum_{i=1}^{k} \lambda_i a_i \end{array} \right. ,$$

où les vecteurs $(a_1, \cdots, a_k)$ sont libres.

Exercice 1. Écrivez la matrice de φ dans des bases bien choisies, en fonction des coordonnées des vecteurs a_1, ..., a_k.

Exercice 2. Soit A une matrice dont les colonnes forment une famille libre, et φ une application linéaire représentée par A. Montrez que φ est injective.

Supposons $\overrightarrow{E}$ muni d'une base $\mathscr{B}$ et $\mathbb{R}^k$ de sa base canonique $\mathscr{B}_{can}$. Soient A_1, ..., A_k les coordonnées de a_1, ..., a_k dans la base $\mathscr{B}$. Alors la matrice de φ dans ces deux bases est

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_{can},\mathscr{B}}(\varphi) = \begin{bmatrix} | & \cdots & | \\ A_1 & \cdots & A_k \\ | & \cdots & | \end{bmatrix}.$$

Exemple I.3.

$\overrightarrow{V} = \{t(1,1,2),\ t \in \mathbb{R}\} = \{(t,t,2t),\ t \in \mathbb{R}\}$ *est une représentation paramétrique de la droite vectorielle* $\mathbb{R}(1,1,2) \subset \mathbb{R}^3$. *Dans les bases canoniques de* $\mathbb{R}$ *et* $\mathbb{R}^3$*, le sous-espace vectoriel* $\overrightarrow{V}$ *est l'image de l'application linéaire de matrice*

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

$\overrightarrow{W} = \{(3s+t, 2s+t, s+2t),\ s,t \in \mathbb{R}\}$ *est une représentation paramétrique du plan engendré par les deux vecteurs* $(3,2,1)$ *et* $(1,1,2)$ *dans* $\mathbb{R}^3$. *Dans les bases canoniques de* $\mathbb{R}^2$ *et* $\mathbb{R}^3$*, le sous-espace vectoriel* $\overrightarrow{W}$ *est l'image de l'application linéaire de matrice*

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

$\overrightarrow{X} = \{(2s+t, 2s+t, 4s+2t),\ s,t \in \mathbb{R}\}$ *n'est pas une représentation paramétrique de* $\overrightarrow{X}$*, car les vecteurs* $(2,2,4)$ *et* $(1,1,2)$ *ne forment pas une famille libre. On observe que cette représentation utilise* 2 *paramètres, alors que* $\overrightarrow{X}$ *est une droite vectorielle.*

Représentation cartésienne

Définition I.4 (Représentation cartésienne d'un sous-espace vectoriel)**.**

*Soit $\overrightarrow{V}$ un sous espace vectoriel de $\overrightarrow{E}$. On appelle **équations cartésiennes** ou **représentation cartésienne** de $\overrightarrow{V}$ la description de ce sous-espace comme lieu d'annulation d'une famille d'équations linéaires en les coordonnées des vecteurs, ces équations étant linéairement indépendantes.*

Autrement dit, une représentation cartésienne de $\overrightarrow{V}$ est une écriture

$$\overrightarrow{V} = \left\{ \overrightarrow{v} \in \overrightarrow{E} \ : \ \ell_1(\overrightarrow{v}) = \cdots = \ell_m(\overrightarrow{v}) = 0 \right\},$$

où $(\ell_1, \cdots, \ell_m)$ est une famille libre de formes linéaires sur $\overrightarrow{E}$; ou encore, en coordonnées dans une base $\mathscr{B}$, l'écriture de $\overrightarrow{V}$ comme l'ensemble des vecteurs $\overrightarrow{v}$ dont les coordonnées X satisfont une équation de la forme $AX = 0$.

Remarque I.5.

*La **codimension** d'un sous-espace vectoriel $\overrightarrow{V}$ est la quantité* $\operatorname{codim}(\overrightarrow{V}) = \dim(\overrightarrow{E}) - \dim(\overrightarrow{V})$.

Dans le cadre de la Définition I.4, on a de plus $\operatorname{codim}(\overrightarrow{V}) = m$.

Plus généralement, si $(\ell_1, \cdots, \ell_m)$ est une famille de formes linéaires sur $\overrightarrow{E}$, alors

$$\overrightarrow{V} = \left\{ \overrightarrow{v} \in \overrightarrow{E} \ : \ \ell_1(\overrightarrow{v}) = \cdots = \ell_m(\overrightarrow{v}) = 0 \right\}$$

est un sous-espace vectoriel de $\overrightarrow{E}$, mais, dans le cadre de ce cours, l'écriture correspondante n'est pas nécessairement une représentation cartésienne de $\overrightarrow{V}$: il se peut que la famille $(\ell_1, \cdots, \ell_m)$ ne soit pas libre, auquel cas $\operatorname{codim}(\overrightarrow{V}) < m$.

Une représentation cartésienne consiste à écrire $\overrightarrow{V}$ comme noyau d'un morphisme

$$\theta : \begin{cases} \overrightarrow{E} & \to & \mathbb{R}^m \\ \overrightarrow{v} & \mapsto & (\ell_1(\overrightarrow{v}), \cdots, \ell_m(\overrightarrow{v})) \end{cases}.$$

La liberté des formes linéaires ℓ_i implique que θ est surjective, et le théorème du rang assure bien que $\dim(\overrightarrow{E}) = \dim(\overrightarrow{V}) + m$.

Exercice 3. Écrivez la matrice de θ dans des bases bien choisies, en fonction des coordonnées des formes linéaires ℓ_1, ..., ℓ_m.

Exercice 4. Soit A une matrice dont les lignes forment une famille libre, et θ une application linéaire représentée par A. Montrez que θ est surjective.

Supposons $\overrightarrow{E}$ muni d'une base $\mathscr{B}$ et $\mathbb{R}^m$ de sa base canonique $\mathscr{B}_{can}$. Soient L_1, ..., L_m les coordonnées de ℓ_1, ..., ℓ_m dans la base $\mathscr{B}$. Alors la matrice de θ dans ces deux bases est

$$\operatorname{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}_{can}}(\theta) = \begin{bmatrix} --- & L_1 & --- \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ --- & L_m & --- \end{bmatrix}.$$

Exemple I.6.

$\overrightarrow{W} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ 3x - 5y + z\}$ *est une représentation cartésienne d'une plan de* $\mathbb{R}^3$*. Dans les bases canoniques de* $\mathbb{R}^3$ *et* $\mathbb{R}$*, le sous-espace vectoriel* $\overrightarrow{W}$ *est le noyau de l'application linéaire de matrice*

$$\begin{bmatrix} 3 & -5 & 1 \end{bmatrix}.$$

$\overrightarrow{V} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x - y = 2x - z = 0\}$ *est une représentation cartésienne d'une droite de* $\mathbb{R}^3$*. Dans les bases canoniques de* $\mathbb{R}^3$ *et* $\mathbb{R}^2$*, le sous-espace vectoriel* $\overrightarrow{V}$ *est le noyau de l'application linéaire de matrice*

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

$\overrightarrow{X} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x - y = 2x - 2y = 0\}$ *n'est pas une représentation cartésienne de* $\overrightarrow{X}$*, car les forment linéaires ("lignes")* $(1,-1,0)$ *et* $(2,-2,0)$ *ne forment pas une famille libre. Autrement dit, l'une des équations définissant* $\overrightarrow{X}$ *est redondante. On observe que cette représentation utilise* 2 *équations, alors que* $\overrightarrow{X}$ *est un plan vectoriel (de codimension* 1*).*

À savoir faire : pour la suite de ce chapitre, il sera tenu pour acquis :

- ▷ la représentation matricielle d'une représentation paramétrique (repsectivement, cartésienne) comme image (respectivement, noyau) d'une application linéaire,
- ▷ le passage d'une représentation paramétrique à une représentation cartésienne d'un sous-espace vectoriel, et réciproquement.

I.2 Équations paramétriques et cartésiennes de sous-espaces affines

Les représentations paramétriques et cartésiennes se généralisent en ajoutant un terme constant. Les espaces correspondants ne sont plus en général des sous-espaces vectoriels de $\overrightarrow{E}$, car ils ne contiennent pas en général le vecteur nul.

Définition I.7 (Représentation paramétrique d'un sous-espace affine, version 1)**.**

Une partie $V \subset \overrightarrow{E}$ *est un sous-espace affine de dimension* k *de* $\overrightarrow{E}$ *s'il existe* $a_0 \in \overrightarrow{E}$ *et une famille libre de vecteurs* $(a_1, \cdots, a_k)$ *tels que :*

$$V = \left\{ a_0 + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i a_i, \ (\lambda_1, \cdots, \lambda_k) \in \mathbb{R}^k \right\}.$$

Une telle représentation est une ***représentation paramétrique*** *de* V*.*

Si un sous-espace affine V a une telle représentation paramétrique, on peut lui associer une sous-espace vectoriel $\overrightarrow{V}$ en retranchant le vecteur a_0 :

$$\overrightarrow{V} = \left\{ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i a_i, \ (\lambda_1, \cdots, \lambda_k) \in \mathbb{R}^k \right\}.$$

Propriété I.8.

Soit V un sous-espace affine admettant une représentation paramétrique. Pour tout $a \in V$,

$$\overrightarrow{V} = \{v - a : \ v \in V\}.$$

*En particulier, $\overrightarrow{V}$ ne dépend pas de la représentation paramétrique de V. On appelle ce sous-espace vectoriel la **direction** de V.*

Preuve : Soient $a_0 \in \overrightarrow{E}$ et $(a_1, \cdots, a_k)$ une famille libre de vecteurs tels que

$$V = \left\{ a_0 + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i a_i, \ (\lambda_1, \cdots, \lambda_k) \in \mathbb{R}^k \right\}.$$

Soit $a \in V$. Alors il existe des paramètres $(\mu_1, \cdots, \mu_k)$ tels que $a = a_0 + \sum_{i=1}^{k} \mu_i a_i$, donc

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{V} &= \left\{ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i a_i, \ (\lambda_1, \cdots, \lambda_k) \in \mathbb{R}^k \right\} \\
&= \left\{ a_0 + \sum_{i=1}^{k} (\mu_i + \lambda_i) a_i - a, \ (\lambda_1, \cdots, \lambda_k) \in \mathbb{R}^k \right\} \\
&= \left\{ a_0 + \sum_{i=1}^{k} \lambda'_i a_i - a, \ (\lambda'_1, \cdots, \lambda'_k) \in \mathbb{R}^k \right\} \\
&= \{v - a, \ v \in V\},
\end{aligned}$$

où l'on a posé $\lambda'_i = \lambda_i + \mu_i$ à l'avant-dernière ligne. □

Remarque I.9.

De cette manière, on peut toujours écrire un espace affine comme une somme d'un point origine avec sa direction : $\boxed{V = a + \overrightarrow{V}}$ *pour tout $a \in V$.*

Réciproquement, pour tout $a \in \overrightarrow{E}$ et tout sous-espace vectoriel $\overrightarrow{V}$ de $\overrightarrow{E}$, l'ensemble $V = a + \overrightarrow{V} = \{a + \overrightarrow{v} : \overrightarrow{v} \in \overrightarrow{V}\}$ est un sous-espace affine de $\overrightarrow{E}$ de direction $\overrightarrow{V}$.

Exercice 5. Justifiez la deuxième partie de la remarque précédente.

On peut de la même façon généraliser les représentations cartésiennes de sous-espaces vectoriels.

Proposition I.10.

Soient $\overrightarrow{E}$, $\overrightarrow{F}$ deux espaces vectoriels, $f : \overrightarrow{E} \to \overrightarrow{F}$ une application linéaire et $b \in \overrightarrow{F}$. Alors :

- ▷ *ou bien $b \notin Im(f)$, auquel cas $f^{-1}(\{b\})$ est vide ;*
- ▷ *ou bien $b \in Im(f)$, auquel cas $f^{-1}(\{b\})$ est un sous-espace affine de direction $\mathrm{Ker}(f)$.*

En particulier, l'ensemble V des vecteurs $v \in \overrightarrow{E}$ dont les coordonnées X sont solutions d'une équation affine $AX = B$ est vide ou est un sous-espace affine. Dans ce second cas, la direction de V est l'ensemble des solutions de l'équation homogène $AX = 0$.

Preuve : Les deux possibilités ($b \notin Im(f)$ ou $b \in Im(f)$) sont mutuellement disjointes, et la première est bien équivalente à $f^{-1}(\{b\}) = \emptyset$. Supposons donc que $b \in Im(f)$, et soit $a \in f^{-1}(\{b\})$. Alors, pour tout $v \in \overrightarrow{E}$:

$$\begin{aligned} v \in f^{-1}(\{b\}) &\iff f(v) = b \\ &\iff f(v-a) = 0 \\ &\iff v - a \in \mathrm{Ker}(f) \\ &\iff v \in a + \mathrm{Ker}(f) = \{a + w,\ w \in \mathrm{Ker}(f)\}. \end{aligned}$$

Donc $f^{-1}(\{b\}) = a + \mathrm{Ker}(f)$ est bien un sous-espace affine de direction $\mathrm{Ker}(f)$. □

Autrement dit, si la préimage d'un point par une application linéaire est non vide, alors elle admet une représentation paramétrique. On peut ainsi étendre la notion de représentation cartésienne aux sous-espaces affines.

Définition I.11 (Représentation cartésienne d'un sous-espace affine, version 1)**.**
*Soit V un sous-espace affine de $\overrightarrow{E}$. Une **représentation cartésienne** de V est une écriture*

$$V = \left\{ v \in \overrightarrow{E} \ : \ \ell_1(v) = y_1, \cdots, \ell_m(v) = y_m \right\},$$

où $(\ell_1, \cdots, \ell_m)$ est une famille libre de formes linéaires sur $\overrightarrow{E}$; ou encore, une écriture de V comme ensemble des vecteurs $v \in \overrightarrow{E}$ dont les coordonnées X sont solutions d'une équation affine $AX = B$, où les lignes de A sont libres.

La condition que les lignes de A soient libres implique que A est surjective, donc que V est non vide, donc – par la Proposition I.10 – que V est un sous-espace affine. On montre finalement que tout sous-espace affine (admettant donc une représentation paramétrique) admet une représentation cartésienne.

Proposition I.12. *Soit V un sous-espace affine de $\overrightarrow{E}$. Posons $m := \dim(\overrightarrow{E}) - \dim(V)$. Alors il existe une application linéaire $f : \overrightarrow{E} \to \mathbb{R}^m$ surjective et $a \in \overrightarrow{E}$ tels que*

$$V = a + \mathrm{Ker}(f).$$

Preuve : Par définition des sous-espaces affines, $\overrightarrow{V}$ est engendré par une famille libre de $\dim(V) = n - m$ vecteurs $(v_1, \cdots, v_{n-m})$. On complète cette famille en une base $(v_1, \cdots, v_n)$ de $\overrightarrow{E}$.

Munissons $\mathbb{R}^m$ de sa base canonique $(e_1, \cdots, e_m)$. Soit f l'unique [2] application linéaire telle que :

- ▷ $f(v_i) = 0$ pour tout $1 \leq i \leq n - m$;
- ▷ $f(v_i) = i - (n - m)$ pour tout $n - m < i \leq n$.

Alors $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}(v_1, \cdots, v_{n-m}) = \overrightarrow{V}$. Il suffit de choisir n'importe que $a \in V$ pour obtenir l'écriture $V = a + \mathrm{Ker}(f)$. De plus, f est surjective, car son image inclut la base canonique de $\mathbb{R}^m$.
□

Conséquence I.13.
Tout sous-espace affine admet une représentation cartésienne.

2. Rappelons qu'une application linéaire est déterminée par son action sur une base !

Remarque I.14.

Les représentations paramétriques et cartésiennes d'un sous-espace vectoriel ou affine ont leurs propres avantages ou inconvénient. Par exemple, une représentation paramétrique permet de trouver rapidement des éléments d'un sous-espace affine, ou de représenter graphiquement ce sous-espace ; une représentation cartésienne d'un sous-espace affine permet de vérifier rapidement si un point donné est dans ce sous-espace ou non.

I.3 Écriture matricielle des sous-espaces affines

On fixe une base $\mathscr{B}$ de $\overrightarrow{E}$. Tout vecteur de $\overrightarrow{E}$ est alors identifiable à ses coordonnées X dans cette base.

Définition I.15.

- ▷ *On appelle système (d'équations) affine associé à $A \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})$, l'équation matricielle $AX = B$ avec $X \in \mathscr{M}_{1,n}(\mathbb{R})$.*
- ▷ *L'équation $AX = 0$ s'appelle* ***système homogène*** *associé.*
- ▷ *On dit que V est d'équation $AX = B$ si*

$$V = \left\{ v \in \overrightarrow{E} ;\ AX = B \right\}$$

En particulier, le sous-ensemble de $\overrightarrow{E}$ solution de l'équation $AX = B$ est :

- ▷ ou bien vide,
- ▷ ou bien un sous-espace affine de $\overrightarrow{E}$.

Réciproquement, tout sous-espace affine est solution d'un système d'équations affines $AX = B$.

Donner les **solutions d'un système**, c'est donner une représentation paramétrique de l'ensemble solution V.

Plus généralement, il faudra savoir passer d'une représentation cartésienne à une représentation paramétrique, et réciproquement. Dans le cas vectoriel, cela est déjà supposé connu. Cela permet d'obtenir une représentation paramétrique ou cartésienne des directions des solutions.

Si l'on dispose d'une représentation paramétrique $V = a + \overrightarrow{V}$, on peut donc trouver une application linéaire f telle que $\overrightarrow{V} = \mathrm{Ker}(f)$. Il suffit alors de choisir $b = f(a)$ pour obtenir l'écriture $V = f^{-1}(\{b\})$.

Si l'on dispose d'une représentation cartésienne $V = f^{-1}(\{b\})$, on peut donc trouver une famille génératrice de $\overrightarrow{V} = \mathrm{Ker}(f)$. Il suffit alors de trouver un point $a \in V$, c'est-à-dire ici une solution de l'équation $AX = B$, pour obtenir l'écriture $V = a + \overrightarrow{V}$.

Exercice 6. Quelle est la nature de l'ensemble d'équation $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$? Retrouvez l'application linéaire associée à la matrice, identifiez dans quel espace sont les solutions à ce système, puis donnez les solutions de ce système.

Exercice 7. Déterminez les matrices associées à l'intersection de deux sous-espaces affines de $\mathbb{R}^3$ d'équation $x + y + z = 2$ et $x - 2y - z = 3$. Donnez une représentation paramétrique de cette intersection.

Exercice 8. Déterminez une représentation cartésienne de $V = \{(3+t, 2+t, 1+2t),\ t \in \mathbb{R}\}$ et de $W = \{(3s+t-1, 2s+t, s+2t+3),\ s,t \in \mathbb{R}\}$.

Ces derniers exercices sont à faire !

II Espaces affines

La notion d'**espace affine** généralise la construction vue au début de ce chapitre. Elle permet notamment d'englober de nouveaux exemples, comme le plan euclidien étudié en géométrie à partir de l'école primaire.

II.1 Définition

La principale différence entre un sous-espace affine et un sous-espace vectoriel est, qu'en général, on ne peut pas additioner deux élément d'un sous-espaces affine. Si $V \subset \overrightarrow{E}$ est un sous-espace affine, la somme de deux éléments de V n'est en général pas dans V : l'addition n'est pas une loi de composition *interne* de V.

Cependant, on dispose d'un espace vectoriel associé $\overrightarrow{V} = \{v - w : v, w \in V\}$. De plus, on peut ajouter des points de V à des vecteurs de $\overrightarrow{V}$: la somme est alors bien dans V.

Enfin, si l'on choisit un point base $a \in V$, alors $V = a + \overrightarrow{V}$ est en bijection avec $\overrightarrow{V}$. Cela ne permet toujours pas de définir une addition naturelle sur V, car cette bijection dépend du choix de a, qui est arbitraire.

La notion d'espace affine permet d'abstraire ces propriétés.

Définition II.1 (Espace affine)**.**

On dit que E est ***un espace affine de direction*** $\overrightarrow{E}$ *si*

- ▷ $\overrightarrow{E}$ *est un espace vectoriel ;*
- ▷ *il existe une application "$\rightarrow$" qui permet d'associer à toute paire de points a, b de E un vecteur de $\overrightarrow{E}$ qu'on note $\overrightarrow{ab}$, et qui vérifie pour tout $a \in E$:*

  - ▷ $b \in E \mapsto \overrightarrow{ab} \in \overrightarrow{E}$ *est une bijection,*
  - ▷ *pour tous points a, b, c de E, on a $\overrightarrow{ab} + \overrightarrow{bc} = \overrightarrow{ac}$: c'est la* ***relation de Chasles****.*

La ***dimension*** *de E est celle de sa direction $\overrightarrow{E}$.*

Exercice 9. Montrez que $\overrightarrow{aa} = 0$, puis que $\overrightarrow{ab} = -\overrightarrow{ba}$.

Exercice 10. (*) Montrez que s'il existe $a_0 \in E$ pour lequel l'application $b \in E \mapsto \overrightarrow{a_0 b} \in \overrightarrow{E}$ est bijective, alors pour tout a, l'application $b \in E \mapsto \overrightarrow{ab} \in \overrightarrow{E}$ est encore bijective.

Exemple II.2.

Un exemple fondamental est le plan euclidien, tel qu'étudié (et axiomatisé) au collège. Le choix de a peut se voir comme un choix d'origine dans le plan. Une fois ce choix fait, le plan est muni d'une structure d'espace vectoriel grâce à l'application $b \in E \mapsto \overrightarrow{ab} \in \overrightarrow{E}$.

Remarquons que l'application $b \in E \mapsto \overrightarrow{ab} \in \overrightarrow{E}$ dépend du choix de a ; des choix différents d'origines donnent des bijections différents entre E et $\overrightarrow{E}$. En particulier, si l'on peut munir E d'une *structure d'espace vectoriel, celle-ci n'est pas canonique ; elle dépend du choix arbitraire de cette origine.*

Exemple II.3.

Soient a, $b \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. *L'ensemble des solutions de l'équation différentielle* $y'(t) + a(t)y(t) = b(t)$ *sur* $\mathbb{R}$ *est un espace affine, dont la direction est l'ensemble des solutions de l'équation différentielle homogène* $y'(t) + a(t)y(t) = 0$. *Cet exemple se généralise avec des équations différentielles d'ordre supérieur.*

II.2 Des espaces vectoriels comme espaces affines

Propriété II.4.

Soit $\overrightarrow{E}$ *un espace vectoriel. Définissons l'application "*$\rightarrow$*" par* $\overrightarrow{ab} = b - a$ *pour tous points* a *et* b. *Alors* $\overrightarrow{E}$ *est aussi un espace affine de direction* $\overrightarrow{E}$. *Ses dimensions en tant qu'espace affine et en tant qu'espace vectoriel coïncident.*

Preuve : Fixons $a \in \overrightarrow{E}$. L'application $b \in \overrightarrow{E} \mapsto b - a \in \overrightarrow{E}$ est bijective, d'inverse $b \in \overrightarrow{E} \mapsto b + a \in \overrightarrow{E}$.

Soient a, b, $c \in \overrightarrow{E}$. Alors

$$\overrightarrow{ab} + \overrightarrow{bc} = (b - a) + (c - b) = c - a = \overrightarrow{ac},$$

ce qui démontre la relation de Chasles. □

Remarque II.5.

Puisque $\overrightarrow{ab} = b - a$, *on peut aussi écrire que* $\boxed{b = a + \overrightarrow{ab}}$.

Cette construction se généralise aux sous-espaces affines.

Proposition II.6. *Soit* $\overrightarrow{E}$ *un espace vectoriel et* V *un sous-espace affine de* $\overrightarrow{E}$.

Définissons l'application "$\rightarrow$*" par* $\overrightarrow{ab} = b - a$ *pour tous points* a, $b \in V$. *Alors* V *est un espace affine de direction* $\overrightarrow{V}$.

II.3 Translations

L'espace $\overrightarrow{E}$ peut s'identifier à des déplacements de E qu'on appelle translations. On procède de la façon suivante :

Définition II.7.

À tout vecteur $\overrightarrow{v}$ *de* $\overrightarrow{E}$ *on associe une application de* E *dans lui-même appelée* ***translation de vecteur*** $\overrightarrow{v}$, *notée* $t_{\overrightarrow{v}}$, *et définie par :*

$$\forall a \in E, t_{\overrightarrow{v}}(a) = b, \text{ où } b \text{ est l'unique point tel que } \overrightarrow{ab} = \overrightarrow{v}.$$

On notera $T(E)$ *l'ensemble des translations de* E, *que l'on munira de la loi (associative) de composition.*

Remarque II.8.

Soit $v \in \overrightarrow{E}$ et $a \in E$. L'énoncé "$t_{\overrightarrow{v}}(a) = b$, où b est l'unique point tel que $\overrightarrow{ab} = \overrightarrow{v}$" peut être délicat à utiliser. En pratique, on pourra utiliser l'équivalence :

$$\forall a, b \in E,\ \forall \overrightarrow{v} \in \overrightarrow{E},\ t_{\overrightarrow{v}}(a) = b \text{ si et seulement si } \overrightarrow{ab} = \overrightarrow{v}.$$

Propriété II.9.

1. *Pour tout $\overrightarrow{v} \in \overrightarrow{E}$, l'application $t_{\overrightarrow{v}}$ est une bijection de E dans E.*
2. *L'application $t : \overrightarrow{v} \mapsto t_{\overrightarrow{v}}$ est une bijection de $\overrightarrow{E}$ dans l'ensemble des translations $T(E)$.*
3. *Pour tous $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w} \in \overrightarrow{E}$, on a $t_{\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}} = t_{\overrightarrow{v}} \circ t_{\overrightarrow{w}} = t_{\overrightarrow{w}} \circ t_{\overrightarrow{v}}$: les groupes $\overrightarrow{E}$ et $T(E)$ sont isomorphes. En particulier $T(E)$ est commutatif.*

PREUVE : On vérifie tout d'abord que $t_{\overrightarrow{v}}$ est bien définie. À $a \in E$ fixé, l'application $b \in E \mapsto \overrightarrow{ab} \in \overrightarrow{E}$ est une bijection, donc il existe bien un unique point b tel que $\overrightarrow{ab} = \overrightarrow{v}$.

Soient $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w} \in \overrightarrow{E}$. Montrons que $t_{\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}} = t_{\overrightarrow{v}} \circ t_{\overrightarrow{w}}$. Soit $a \in E$. Alors $t_{\overrightarrow{w}}(a)$ est l'unique point $b \in E$ tel que $\overrightarrow{ab} = \overrightarrow{w}$. Ensuite, $t_{\overrightarrow{v}} \circ t_{\overrightarrow{w}}(a)$ est l'unique point c tel que $\overrightarrow{bc} = \overrightarrow{v}$. Mais alors, par la relation de Chasles,

$$\overrightarrow{ac} = \overrightarrow{ab} + \overrightarrow{bc} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}.$$

Donc $c = t_{\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}}(a)$. Donc $t_{\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}}(a) = t_{\overrightarrow{v}} \circ t_{\overrightarrow{w}}(a)$; le point a étant arbitraire, $t_{\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}} = t_{\overrightarrow{v}} \circ t_{\overrightarrow{w}}$.

D'une part, en choisissant $\overrightarrow{w} = -\overrightarrow{v}$, on trouve $t_{\overrightarrow{v}} \circ t_{-\overrightarrow{v}} = t_{\overrightarrow{0}}$. Or, à a fixé, $\overrightarrow{aa} = \overrightarrow{0}$, donc $t_{\overrightarrow{0}}(a) = a$; ainsi, $t_{\overrightarrow{0}} = id$. Donc $t_{-\overrightarrow{v}}$ est l'inverse de $t_{\overrightarrow{v}}$. Par conséquent, $T(E)$ contient l'élément neutre $t_{\overrightarrow{0}} = id$, est clôt par inverses (l'inverse de $t_{\overrightarrow{v}}$ est $t_{-\overrightarrow{v}}$ et par compositions ($t_{\overrightarrow{v}} \circ t_{\overrightarrow{w}} = t_{\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}}$) : c'est un groupe.

De plus, la relation $t_{\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}} = t_{\overrightarrow{v}} \circ t_{\overrightarrow{w}}$ signifie que l'application $\overrightarrow{v} \mapsto t_{\overrightarrow{v}}$ est un morphisme de groupes de $\overrightarrow{E}$ dans $T(E)$. Ce morphisme est surjectif par construction : toute translation est translation par un vecteur de $\overrightarrow{E}$. Il reste à montrer qu'il est injectif. Soit $\overrightarrow{v} \in \overrightarrow{E}$ tel que $t_{\overrightarrow{v}} = id$. Soit $a \in E$. Alors $\overrightarrow{0} = \overrightarrow{aa} = \overrightarrow{at_{\overrightarrow{v}}(a)} = \overrightarrow{v}$. Le noyau du morphisme $\overrightarrow{v} \mapsto t_{\overrightarrow{v}}$ est trivial, donc ce morphisme est injectif, et de là un isomorphisme. □

Remarque II.10 (Groupes opérants sur un ensemble)**.**

*On déduit de la dernière propriété qu'un espace affine est un espace sur lequel on peut faire agir un espace vectoriel : on dit que $\overrightarrow{E}$ **opère sur** E par translation.*

*En général, on parle **d'une action d'un groupe** G sur un ensemble E, s'il existe une famille de bijections de E, $(T_g)_{g \in G}$ vérifiant pour tout g, g' de G, $T_g \circ T_{g'} = T_{g.g'}$. Dans notre cadre, c'est le groupe commutatif $(\overrightarrow{E}, +)$ qui agit sur E par translations.*

Dans le cours, il y a beaucoup d'actions de groupes... cherchez-les !

Notation : Comme dans les espaces vectoriels, on peut alors donner un sens à l'addition d'un point et d'un vecteur :

$$\boxed{b = a + \overrightarrow{v} \quad \text{signifie} \quad \overrightarrow{ab} = \overrightarrow{v}, \quad \text{ou encore} \quad t_{\overrightarrow{v}}(a) = b.}$$

De plus :

$$\boxed{\text{Pour tous } a \in E \text{ et } \overrightarrow{v} \in \overrightarrow{E}, \text{ il existe un unique point } b \in E \text{ tel que } b = a + \overrightarrow{v}.}$$

Remarque II.11.

Au collège et au lycée, la logique du programme est inversée par rapport à la présentation faite ici. Soit E le plan euclidien. L'espace vectoriel $\overrightarrow{E}$ n'est pas connu a priori. On peut tout d'abord définir géométriquement le groupe des translations du plan euclidien $T(E)$, et montrer qu'il est un groupe commutatif. L'enjeu sera ensuite de munir $T(E)$ d'une multiplication par les réels.

La présentation faite ici, partant de l'espace vectoriel, a l'avantage d'être bien plus générale, et notamment de fonctionner quelque soient la dimension de l'espace E et le corps utilisé.

Exercice 11. Soit $a = (1, 0)$ et $b = (1, 1)$. Quel sens donner à $a + b$? Représenter ces 3 couples sur un dessin et faire apparaitre la relation vectorielle, puis la relation affine.

II.4 Milieu et parallélogramme

Milieu

Définition II.12.

On appelle milieu de deux points a et b d'un espace affine le point m qui vérifie l'une des conditions équivalentes suivantes :

1. $\overrightarrow{am} = \overrightarrow{mb}$;
2. $\overrightarrow{am} = \frac{1}{2}\overrightarrow{ab}$;
3. *pour tout point $o \in E$,*
$$\overrightarrow{om} = \frac{1}{2}\overrightarrow{oa} + \frac{1}{2}\overrightarrow{ob}.$$

Preuve : Remarquons tout d'abord qu'il existe un unique point m tel que $\overrightarrow{am} = 2\overrightarrow{ab}$. Il reste à montrer que les propriétés 1 et 3 sont équivalentes à la propriété 2.

Soit a, b, m trois points de E. Par la relation de Chasles, $\overrightarrow{am} = \overrightarrow{ab} + \overrightarrow{bm}$, donc $\overrightarrow{am} = \overrightarrow{mb}$ si et seulement si $\overrightarrow{am} = 2\overrightarrow{ab}$. Les propriétés 1 et 2 sont donc équivalentes.

Supposons la propriété 1 vérifiée. Soit $o \in E$. Alors

$$\frac{1}{2}\overrightarrow{oa} + \frac{1}{2}\overrightarrow{ob} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{om} + \overrightarrow{ma}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{om} + \overrightarrow{mb}) = \overrightarrow{om} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{ma} + \overrightarrow{mb}) = \overrightarrow{om}.$$

Réciproquement, en reprenant ce calcul, si $\overrightarrow{om} = \frac{1}{2}\overrightarrow{oa} + \frac{1}{2}\overrightarrow{ob}$, alors $\frac{1}{2}(\overrightarrow{ma} + \overrightarrow{mb}) = 0$, et donc $\overrightarrow{am} = \overrightarrow{mb}$. □

Exercice 12. Justifiez le fait que le milieu de (a, b) est aussi le milieu de (b, a)

Remarque II.13.

Cette notion de milieu se généralise à celle de ***barycentre****. Soient $(a_1, \ldots, a_n)$ des points de E, et $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que*

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1.$$

Montrez dans l'ordre que :

1. *Pour tout point $o \in E$, il existe un point $m \in E$ tel que*

$$\overrightarrow{om} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{oa_i}.$$

2. *Il existe un point $m \in E$ tel que, pour tout point $o \in E$,*

$$\overrightarrow{om} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{oa_i}.$$

3. *Ce point m est unique, et tel que*

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{ma_i} = 0.$$

Définition II.14.
*Soient a, $b \in E$. On appelle **segment** $[a, b]$ l'ensemble*

$$[a, b] = \{a + t\overrightarrow{ab},\ t \in [0, 1]\} = \{\textit{barycentres de } (a, b) \textit{ à poids positifs}\}.$$

Exercice 13. Montrez que les deux définitions du segment $[a, b]$ coïncident.

Identités du parallélogramme

Définition II.15.
*On appelle **parallélogramme** un quadruplet de points (a, b, c, d) qui vérifie l'une des conditions équivalentes suivantes :*

1. $\overrightarrow{ab} = \overrightarrow{dc}$,
2. $\overrightarrow{ad} = \overrightarrow{bc}$,
3. *le milieu de (a, c) est égal au milieu de (b, d).*

Preuve : Soit a, b, c, d quatre points quelconques. Notons m le milieu de (a, c) et m' celui de (b, d). Alors $\overrightarrow{ab} = \overrightarrow{am} + \overrightarrow{mm'} + \overrightarrow{m'b}$ et $\overrightarrow{dc} = \overrightarrow{dm'} + \overrightarrow{m'm} + \overrightarrow{mc}$, donc $\overrightarrow{ab} - \overrightarrow{dc} = \overrightarrow{mm'} - \overrightarrow{m'm} = 2\overrightarrow{mm'}$.

De même, $\overrightarrow{ad} - \overrightarrow{bc} = 2\overrightarrow{mm'} = \overrightarrow{ab} - \overrightarrow{dc}$. Par conséquent, $\overrightarrow{ad} = \overrightarrow{bc}$ si et seulement si $\overrightarrow{ab} = \overrightarrow{dc}$, si et seulement si $\overrightarrow{mm'} = 0$ (c'est-à-dire si et seulement si $= m'$). □

Exercice 14. Démontrez séparément chaque équivalence, et illustrez chacune des étapes de ces démonstrations.

III Sous-espaces affines

Nous disposons d'une notion générale d'espace affine, et d'une notion de sous-espace affine d'un espace vectoriel. Par la Proposition II.6, les sous-espaces affines d'un espace vectoriel sont des espaces affines.

Nous allons donner maintenant une notion générale de sous-espace affine d'un espace affine.

III.1 Définition

Définition III.1.

Soit $\overrightarrow{F}$ un sous-espace vectoriel de $\overrightarrow{E}$. Un ensemble non vide F d'un espace affine E est un ***sous-espace affine de direction*** $\overrightarrow{F}$ *s'il vérifie l'une des deux conditions équivalentes suivantes :*

1. *il existe $a \in F$ tel que $F = \{v \in E : \overrightarrow{av} \in \overrightarrow{F}\} = a + \overrightarrow{F}$;*
2. *$F = a + \overrightarrow{F}$ pour tout $a \in F$.*

Preuve : Il faut montrer que ces deux conditions sont équivalentes. F étant non vide, la seconde condition implique la première. Supposons donc qu'il existe $a \in F$ tel que $F = a + \overrightarrow{F}$, et montrons que la seconde condition est satisfaite.

Soit $b \in F$. Alors $b \in a + \overrightarrow{F}$, donc $\overrightarrow{ba} = -\overrightarrow{ab} \in \overrightarrow{F}$. Alors, pour tout $v \in E$,

$$\begin{aligned} v \in F &\iff \overrightarrow{av} \in \overrightarrow{F} \\ &\iff \overrightarrow{ba} + \overrightarrow{av} \in \overrightarrow{F} \\ &\iff \overrightarrow{bv} \in \overrightarrow{F} \\ &\iff v \in b + \overrightarrow{F} \end{aligned}$$

□

Remarque III.2.

En particulier, $\overrightarrow{F}$ est déterminé par F : un sous-ensemble $F \subset E$ est un sous-espace affine de E si et seulement s'il existe $a \in F$ tel que $\{\overrightarrow{ab} ; b \in F\}$ soit un sous-espace vectoriel de $\overrightarrow{E}$. Si c'est le cas, alors ce sous-espace vectoriel ne dépend pas du choix de a, et est la direction de F.

Définition III.3.

La dimension d'un sous-espace affine F est celle de sa direction $\overrightarrow{F}$. On la note $\dim(F) = \dim(\overrightarrow{F})$.

Remarque III.4.

Les sous-espaces affines de dimension 0 sont les singletons. Il y a un seul sous-espace affine de dimension n, qui est E tout entier.

On retrouve les définitions classiques analogues à celles des sous-espaces vectoriels :

- ▷ *Une droite affine est un sous-espace affine de dimension 1.*
- ▷ *Un plan affine est un sous-espace affine de dimension 2.*
- ▷ *Un hyperplan affine est un sous-espace affine de dimension $\dim(E) - 1$.*

III.2 Parallélismes

Le parallélisme est aisé à définir avec ce formalisme. Il faudra faire attention à deux points :

- ▷ Nous avons deux notions de parallélisme. Une forme de parallélisme faible existe entre sous-espaces affines de dimensions distinctes.
- ▷ Un sous-espace sera toujours parallèle à lui-même. En particulier, nous n'écrirons pas de dichotomie du type "parallèles ou confondus".

Définition III.5.

- ▷ *Deux sous-espaces affines F et G sont* **parallèles** *s'ils ont même direction. On note alors $F \,/\!/\, G$.*
- ▷ *Un sous-espace affine F est* ***faiblement parallèle*** *à un sous-espace affine G si $\overrightarrow{F} \subset \overrightarrow{G}$.*

Propriété III.6.

La relation de parallélisme est une relation d'équivalence.

La relation de faible parallélisme est réflexive et transitive.

Preuve : Montrons le premier point.

- ▷ Un sous-espace affine a la même direction que lui-même, donc est parallèle à lui-même. Le parallélisme est une relation réflexive.
- ▷ Soient F, G deux sous-espaces affines. Si F est parallèle à G, alors $\overrightarrow{F} = \overrightarrow{G}$, donc G est parallèle à F. Le parallélisme est une relation symétrique.
- ▷ Soient F, G, H trois sous-espaces affines. Si F est parallèle à G et G à H, alors $\overrightarrow{F} = \overrightarrow{G}$ et $\overrightarrow{G} = \overrightarrow{H}$, donc $\overrightarrow{F} = \overrightarrow{H}$, donc F est parallèle à H. Le parallélisme est une relation transitive.

Montrons le second point.

- ▷ Un sous-espace affine a la même direction que lui-même, donc est faiblement parallèle à lui-même. Le parallélisme faible est une relation réflexive.
- ▷ Soient F, G, H trois sous-espaces affines. Si F est faible parallèle à G et G à H, alors $\overrightarrow{F} \subset \overrightarrow{G}$ et $\overrightarrow{G} \subset \overrightarrow{H}$, donc $\overrightarrow{F} \subset \overrightarrow{H}$, donc F est faiblement parallèle à H. Le parallélisme faible est une relation transitive.

□

La relation "F est faiblement parallèle à G" n'est pas une relation d'équivalence. Il faut donc éviter de dire que "F et G sont faiblement parallèles" ; cela n'a aucun sens ! Cette relation n'est pas non plus antisymétrique ; pourquoi ?

Propriété III.7.

Deux sous-espace affines F et G parallèles sont soit disjoints, soit confondus.

Si F est faiblement parallèle à G, soit il est disjoint de G soit il est inclus dans G.

Preuve : Soient F et G deux sous-espaces affines parallèles. Supposons que F et G ne soient pas disjoints. Soit $a \in F \cap G$. Alors $F = a + \overrightarrow{F} = a + \overrightarrow{G} = G$, donc F et G sont confondus.

Soient F et G deux sous-espaces affines tels que F est faiblement parallèle à G. Supposons que F et G ne soient pas disjoints. Soit $a \in F \cap G$. Alors

$$\begin{aligned} F &= \{v \in E : \overrightarrow{av} \in \overrightarrow{F}\} \\ &\subset \{v \in E : \overrightarrow{av} \in \overrightarrow{G}\} \\ &= G, \end{aligned}$$

donc $F \subset G$. □

III.3 Intersection

Attention : l'intersection de deux sous-espaces affines peut être vide ! Ce n'est pas le cas pour les sous-espaces vectoriels. Ceci conduit à de nombreux cas particuliers dans les énoncés de théorèmes, cas particuliers qui motivent la *géométrie projective*[3].

Propriété III.8.

Soient F et G deux sous-espace affines de E. L'intersection de F et G est ou bien vide, ou bien un sous-espace affine de direction $\overrightarrow{F} \cap \overrightarrow{G}$.

Preuve : Soient F et G deux sous-espaces affines de E. Supposons leur intersection non vide ; soit $a \in F \cap G$. Rappelons que $F = \{v \in E : \overrightarrow{av} \in \overrightarrow{F}\}$ et $G = \{v \in E : \overrightarrow{av} \in \overrightarrow{G}\}$. Par conséquent,

$$F \cap G = \{v \in E : \overrightarrow{av} \in \overrightarrow{F} \text{ et } \overrightarrow{av} \in \overrightarrow{G}\} = \{v \in E : \overrightarrow{av} \in \overrightarrow{F} \cap \overrightarrow{G}\} = a + \overrightarrow{F} \cap \overrightarrow{G}$$

est bien un sous-espace affine de direction $\overrightarrow{F} \cap \overrightarrow{G}$. □

Pour déterminer l'intersection de deux sous-espaces affines, il faudra en pratique résoudre des systèmes d'équations, notamment pour décider si leur intersection est vide ou, si ce n'est pas le cas, trouver un point dans leur intersection. On peut cependant donner un critère général – qui n'est pas à apprendre – pour déterminer si une intersection de sous-espaces affines est vide.

Lemme III.9.

Soient F, G deux sous-espaces affines. Soient $a \in F$ et $b \in G$. Alors $F \cap G$ est non vide (et donc un sous-espace affine) si et seulement si $\overrightarrow{ab} \in \overrightarrow{F} + \overrightarrow{G}$.

Preuve : On remarque que $F = a + \overrightarrow{F}$ et $G = b + \overrightarrow{G}$.

L'intersection $F \cap G$ est non vide si et seulement s'il existe un point c dans cette intersection, c'est-à-dire si et seulement s'il existe c tel que $\overrightarrow{ac} \in \overrightarrow{F}$ et $\overrightarrow{bc} \in \overrightarrow{G}$.

Donc, si $F \cap G$ est non vide, alors $\overrightarrow{ab} = \overrightarrow{ac} - \overrightarrow{bc} \in \overrightarrow{F} + \overrightarrow{G}$. Réciproquement, si $\overrightarrow{ab} \in \overrightarrow{F} + \overrightarrow{G}$, alors on peut écrire $\overrightarrow{ab} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ avec $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in \overrightarrow{F} \times \overrightarrow{G}$. Posons alors $c = a + \overrightarrow{u}$. Le point c appartient à F ; de plus, $c = a + (\overrightarrow{ab} - \overrightarrow{v}) = b - \overrightarrow{v}$, donc $c \in G$. L'intersection de F et G est donc non vide. □

Exemple III.10.

- ▷ *Si $\overrightarrow{F} + \overrightarrow{G} = \overrightarrow{E}$, alors $F \cap G$ est un sous-espace affine de dimension* $\dim(F) + \dim(G) - \dim(E)$.
- ▷ *Dans le plan, l'intersection de deux droites affines non parallèles est un sous-espace affine de dimension* 0 *(Exercice !), donc un point.*
- ▷ *Plus généralement, si $\overrightarrow{F} \oplus \overrightarrow{G} = \overrightarrow{E}$, alors $F \cap G$ est un point.*
- ▷ *Dans l'espace (de dimension* 3*), l'intersection de deux plans affines non parallèles est une droite affine (Exercice !).*

On peut également donner un encadrement de la dimension de l'intersection de deux sous-espaces affines lorsqu'elle est non vide : cela permet de retrouver les résultats concernant le nombre de variables libres pour les systèmes linéaires.

3. Qui ne sera (hélas) pas abordée dans ce cours.

Propriété III.11.

Soient F et G deux sous-espace affines de E. Si $F \cap G$ est non vide, alors

$$\dim(E) - \dim(F \cap G) \leq [\dim(E) - \dim(F)] + [\dim(E) - \dim(G)]. \tag{3.1}$$

Autrement dit si $F \cap G$ est non vide, alors

$$\min\{\dim(F), \dim(G)\} \geq \dim(F \cap G) \geq \dim(F) + \dim(G) - \dim(E).$$

Preuve : La seule chose à démontrer est que

$$\dim(\overrightarrow{F} \cap \overrightarrow{G}) \geq \dim(\overrightarrow{F}) + \dim(\overrightarrow{G}) - \dim(\overrightarrow{E})$$

pour des sous-espaces vectoriels $\overrightarrow{F}$, $\overrightarrow{G}$ de $\overrightarrow{E}$. C'est une conséquence de l'égalité

$$\dim(\overrightarrow{F}) + \dim(\overrightarrow{G}) = \dim(\overrightarrow{F} \cap \overrightarrow{G}) + \dim(\overrightarrow{F} + \overrightarrow{G}),$$

et de l'inégalité $\dim(\overrightarrow{F} + \overrightarrow{G}) \leq \dim(\overrightarrow{E})$. □

Remarque III.12.

Rappelons que $\operatorname{codim}(F) = \dim(E) - \dim(F)$ *est le nombre minimal de contraintes linéaires (ou affines) nécessaires pour spécifier F. Par exemple, un hyperplan est de dimension* $\dim(E) - 1$*, et donc de codimension* 1*, car il y a besoin d'une seule équation cartésienne pour le définir. L'Équation* (3.1) *peut ainsi se réécrire :*

$$\operatorname{codim}(F \cap G) \leq \operatorname{codim}(F) + \operatorname{codim}(G).$$

L'ensemble $F \cap G$ est l'ensemble des points qui satisfont simultanément les contraintes "être dans F" et "être dans G". Il est donc facile de trouver $[\dim(E) - \dim(F)] + [\dim(E) - \dim(G)]$ *contraintes permettant de définir $F \cap G$; il suffit de prendre* $[\dim(E) - \dim(F)]$ *contraintes définissant F, et de leur ajouter* $[\dim(E) - \dim(G)]$ *contraintes définissant G.*

Cependant, si l'on procède ainsi, on peut avoir des contraintes redondantes[4]*, donc la quantité* $[\dim(E) - \dim(F)] + [\dim(E) - \dim(G)]$ *n'est qu'une borne supérieure sur la codimension de $F \cap G$.*

Conséquence III.13.

Soient F un sous-espace affine de E et H un hyperplan affine de E. Si $F \cap G$ est non vide, alors c'est un sous-espace affine de dimension au moins $\dim(F) - 1$.

Preuve : On applique la propriété III.11 à F et H. Comme $\dim(E) - \dim(H) = 1$,

$$\dim(E) - \dim(F \cap H) \leq [\dim(E) - \dim(F)] + 1,$$

et donc $\dim(F \cap H) \geq \dim(F) - 1$. □

Conséquence III.14.

L'intersection de k hyperplans affines d'un espace affine de dimension n est soit vide, soit un sous-espace affine de dimension au moins $n - k$.

4. Prendre par exemple $F = G$: les équations linéaires définissant F apparaîtront en double.

Preuve : On fixe E (et donc sa dimension n), et on procède par récurrence sur k.

Le résultat est vrai pour $k = 0$: l'intersection d'aucun hyperplan [5] est l'espace E tout entier, qui est bien de dimension $n = n - 0$.

Soit $0 \leq k < n$, et supposons l'énoncé vrai à l'ordre k. Soient H_1, ..., H_{k+1} des hyperplans de E. Supposons leur intersection $\bigcap_{j=1}^{k+1} H_j$ non vide. Alors

$$\bigcap_{j=1}^{k+1} H_j = \left(\bigcap_{j=1}^{k} H_j\right) \cap H_{k+1}$$

est l'intersection d'un sous-espace affine de dimension au moins $n-k$ (par l'hypothèse de récurrence) avec un hyperplan. Cette intersection étant supposée non vide,

$$\begin{aligned}
\dim\left(\bigcap_{j=1}^{k+1} H_j\right) &\geq \dim\left(\bigcap_{j=1}^{k} H_j\right) + \dim(H_{k+1}) - \dim(E) \\
&\geq n - k + \dim(H_{k+1}) - \dim(E) \\
&= n - k + (n-1) - n \\
&= n - (k+1),
\end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer. □

.

Exercice 15. Une réunion de sous-espaces affines est-elle un sous-espace affine ? Donnez des exemples.

III.4 Sous-espace affine engendré

La notion de sous-espace affine engendré est une version affine de la notion de sous-espace vectoriel engendré.

Définition III.15.

Soit A est un sous-ensemble non vide de E. On appelle ***sous-espace affine engendré par*** *A le plus petit sous-espace affine contenant A. On le note $\mathrm{Aff}(A)$.*

Preuve : On considère l'intersection de tous les sous-espaces affines contenant A. C'est un sous-espace affine qui contient A, qui est minimal pour l'inclusion. □

Remarque III.16.

Pour exploiter cette définition, ou pourra utiliser les propriétés suivantes :

- ▷ $A \subset \mathrm{Aff}(A)$ *;*
- ▷ $A = \mathrm{Aff}(A)$ *si (et seulement si) A est un sous-espace affine ;*
- ▷ *si F est un sous-espace affine et $A \subset F$, alors* $\mathrm{Aff}(A) \subset F$.

5. Comme toujours, si vous n'êtes pas à l'aise avec ces conventions, n'utilisez l'énoncé que pour $k \geq 1$, et commencez la récurrence à $k = 1$.

Remarque III.17.

Un espace vectoriel $\overrightarrow{E}$ *est, comme on l'a vu, muni d'une structure d'espace affine. On a alors, pour tout sous-ensemble* A*,*

$$\mathrm{Aff}(A) \subset \mathrm{Vect}(A) \ ;$$

en effet, $\mathrm{Vect}(A)$ *est un sous-espace affine et* $A \subset \mathrm{Vect}(A)$*, donc* $\mathrm{Aff}(A) \subset \mathrm{Vect}(A)$*. Cette inclusion est en général stricte. Par exemple, si* A *est un singleton différent de* $\{\overrightarrow{0}\}$*, alors* $\mathrm{Aff}(A) = A$ *alors que* $\mathrm{Vect}(A)$ *est une droite vectorielle.*

Définition III.18.

On dit que des points sont :

- ▷ ***alignés*** *si leur sous-espace affine engendré est inclus dans une droite affine ;*
- ▷ ***coplanaires*** *si leur sous-espace affine engendré est inclus dans un plan affine.*

Propriété III.19.

Soit $\{a_0, a_1, \cdots, a_k\}$ *un ensemble de* $k+1$ *points d'un espace affine* E*. Alors*

$$\mathrm{Aff}(\{a_0, a_1, \cdots, a_k\}) = a_0 + \overrightarrow{V} \ \text{ avec } \overrightarrow{V} = \mathrm{Vect}\{\overrightarrow{a_0a_1}, \cdots, \overrightarrow{a_0a_k}\},$$

et en particulier $\dim(\mathrm{Aff}(\{a_0, a_1, \cdots, a_k\})) \leq k$*.*

Preuve : D'une part, $a + \overrightarrow{V}$ est un sous-espace affine, qui contient a_0 ainsi que $a_0 + \overrightarrow{a_0a_1} = a_1$, ..., $a_0 + \overrightarrow{a_0a_k} = a_k$. Donc $\{a_0, a_1, \cdots, a_k\} \subset a + \overrightarrow{V}$. Par conséquent, $\mathrm{Aff}(\{a_0, a_1, \cdots, a_k\}) \subset a_0 + \overrightarrow{V}$.

D'autre part, soit F un sous-espace affine contenant $\{a_0, a_1, \cdots, a_k\}$. Alors $a_0 \in F$, donc $F = a_0 + \overrightarrow{F}$. De plus, a_1, ..., $a_k \in F$, donc $\overrightarrow{a_0a_1}$, ..., $\overrightarrow{a_0a_k} \in \overrightarrow{F}$. Donc $\overrightarrow{V} \subset \overrightarrow{F}$. Donc $a_0 + \overrightarrow{V} \subset a_0 + \overrightarrow{F} = F$. Par conséquent, $a_0 + \overrightarrow{V}$ est bien le plus petit sous-espace affine contenant $\{a_0, a_1, \cdots, a_k\}$.

Finalement, $\overrightarrow{V}$ est engendré par k vecteurs, donc est de dimension au plus k. □

Conséquence III.20.

- ▷ *Un singleton est un sous-espace affine.*
- ▷ *Le sous-espace affine engendré par* 2 *points distincts est une droite affine.*
- ▷ *Le sous-espace affine engendré par* 3 *points distincts est un plan affine ou une droite affine.*

Définition III.21.

On dit que les points $\{a_0, a_1, \cdots, a_k\}$ *sont* ***affinement indépendants*** *si la dimension du sous-espace affine engendré par ces points est maximale, et vaut donc* k*.*

III.5 Repères et coordonnées

Une partie d'un espace vectoriel $\overrightarrow{E}$ est une base si elle engendre $\overrightarrow{E}$ et est libre. La notion de points affinement indépendants permet d'adapter cette construction aux espaces affines.

Définition III.22.

Soient $n+1$ *points* $(a_0, a_1, \cdots, a_n)$ *d'un espace affine* E *de dimension* n*. On dit que ces points forment un* **repère** *de* E *s'ils sont affinement indépendants. On appelle alors* a_0 ***l'origine*** *du repère.*

Propriété III.23.

Soit $(a_0, a_1, \cdots, a_n)$ un repère de E. Alors :

1. *$(\overrightarrow{a_0a_1}, \cdots, \overrightarrow{a_0a_n})$ est une base de $\overrightarrow{E}$.*
2. *Tout point $x \in E$ admet des* ***coordonnées*** *$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$* ***dans le repère*** *$(a_0, a_1, \cdots, a_n)$. Ce sont les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{a_0x}$ dans la base $(\overrightarrow{a_0a_1}, \cdots, \overrightarrow{a_0a_n})$. Le point x est de coordonnées $(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ si et seulement si*

$$x = a_0 + x_1\overrightarrow{a_0a_1} + \cdots + x_n\overrightarrow{a_0a_n}.$$

Remarque III.24.

La donnée d'un repère de l'espace affine E est donc équivalente à la donnée d'un point $a_0 \in E$ (l'origine du repère) est d'une base de $\overrightarrow{E}$.

En particulier, un repère d'un espace affine de dimension n comprend $n+1$ points, mais un point a n coordonnées !

Exemple III.25.

L'exemple fondamental est le plan euclidien. Le point de vue du collège est qu'un repère du plan euclidien est la donnée de 3 points non alignés (O, I, J). Le point de vue du lycée est que la donnée d'un tel repère est équivalente à la donnée de l'origine du repère O, et de deux vecteurs non colinéaires $\overrightarrow{i} = \overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{j} = \overrightarrow{OJ}$.

Exemple III.26.

Dans $\mathbb{R}^n$, on dispose d'un repère naturel (canonique) formé des points $(0, \cdots, 0)$, $(1, 0, \cdots, 0)$,... ,$(0, \cdots, 1)$. Dans ce repère, les coordonnées d'un point $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ coïncident avec ce point.

IV Applications affines

La richesse de l'algèbre linéaire vient non seulement des espaces vectoriels, mais de l'analyse des applications linéaires entre ces espaces. Nous allons définir une notion d'applications affines, analogue affine des applications linéaires.

IV.1 Définitions

Définition IV.1.

Soient E et F des espaces affines de directions $\overrightarrow{E}$ et $\overrightarrow{F}$ respectivement. Soit $f : E \to F$. Il y a équivalence entre :

1. *il existe $a \in E$ tel que l'application*

$$\overrightarrow{f} : \overrightarrow{v} \in \overrightarrow{E} \mapsto \overrightarrow{f(a)f(a+\overrightarrow{v})} \in \overrightarrow{F}$$

   soit linéaire.

2. *pour tout $a \in E$, l'application*

$$\overrightarrow{f} : \overrightarrow{v} \in \overrightarrow{E} \mapsto \overrightarrow{f(a)f(a+\overrightarrow{v})} \in \overrightarrow{F}$$

   est linéaire.

Si f vérifie l'une de ces conditions, on dit que f est une ***application affine****. Dans ce cas, l'application $\overrightarrow{f} : \overrightarrow{E} \to \overrightarrow{F}$ ne dépend pas de a_0 ; elle s'appelle* ***application linéaire associée à*** *f.*

Preuve : Montrons que les deux conditions sont équivalentes. Comme E est non vide, la seconde condition implique la première ; montrons la réciproque. Soit $a \in E$, et soit $\overrightarrow{f} : \overrightarrow{v} \in \overrightarrow{E} \mapsto \overrightarrow{f(a)f(a+\overrightarrow{v})} \in \overrightarrow{F}$. Soit $b \in E$.

Soit $\overrightarrow{v} \in \overrightarrow{E}$. Remarquons que $b = a+\overrightarrow{ab}$, donc $\overrightarrow{f(a)f(b)} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{ab})$. De même, $b+\overrightarrow{v} = a+\overrightarrow{ab}+\overrightarrow{v}$, donc

$$\overrightarrow{f(a)f(b+\overrightarrow{v})} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{ab}+\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{ab}) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{v}).$$

Par la relation de Chasles,

$$\overrightarrow{f(b)f(b+\overrightarrow{v})} = \overrightarrow{f(b)f(a)} + \overrightarrow{f(a)f(b+\overrightarrow{v})} = -\overrightarrow{f}(\overrightarrow{ab}) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{ab}) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{v}).$$

Donc l'application $\overrightarrow{v} \in \overrightarrow{E} \mapsto \overrightarrow{f(b)f(b+\overrightarrow{v})} \in \overrightarrow{F}$ est linéaire, et est égale à $\overrightarrow{f}$. □

En choisissant $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{ab}$, on obtient immédiatement la propriété suivante :

Propriété IV.2.
Soit $f : E \to F$ une application affine. Alors, pour tous a, $b \in E$,

$$\overrightarrow{f}(\overrightarrow{ab}) = \overrightarrow{f(a)f(b)},$$

ou, autrement dit, $f(b) = f(a) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{ab})$.

Des espaces vectoriels vus comme espaces affines

Propriété IV.3.
Lorsque $\overrightarrow{E}$ et $\overrightarrow{F}$ sont des espaces vectoriels, f est une application affine si et seulement si $\overrightarrow{f} \in L(\overrightarrow{E}, \overrightarrow{F})$, où

$$\forall \overrightarrow{v} \in \overrightarrow{E},\ \overrightarrow{f}(\overrightarrow{v}) = f(\overrightarrow{v}) - f(\overrightarrow{0}).$$

Preuve : On applique la définition d'une application affine avec $a = 0$: l'application f est affine si et seulement si l'application $\overrightarrow{v} \mapsto \overrightarrow{f(\overrightarrow{0})f(\overrightarrow{0}+\overrightarrow{v})}$ est linéaire. Or $\overrightarrow{f(\overrightarrow{0})f(\overrightarrow{0}+\overrightarrow{v})} = f(\overrightarrow{v}) - f(\overrightarrow{0})$, ce qui conclut. □

Exercice 16. Démontrer que si E et F sont des espaces vectoriels, alors f est une application affine de E dans F si et seulement si il existe une translation $t \in T(F)$ telle que $t \circ f \in L(E, F)$.

Existence et unicité d'applications affines

Nous pouvons construire des applications affines ou bien à partir de sa partie linéaire et de l'image d'un point, ou bien à partir de son action sur un repère.

Propriété IV.4.
Soient f, $g : E \to F$ deux applications affines ayant même partie linéaire. Alors :

▷ *ou bien $f = g$;*

▷ *ou bien $f(a) \neq g(a)$ pour tout $a \in E$.*

Preuve : Soient f, $g : E \to F$ deux applications affines de même partie linéaire. Supposons qu'il existe $a \in E$ tel que $f(a) = g(a)$, et montrons que $f = g$.

Soit $b \in E$. Alors

$$f(b) = f(a) + \overrightarrow{f(a)f(b)} = g(a) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{ab}) = g(a) + \overrightarrow{g}(\overrightarrow{ab}) = g(a) + \overrightarrow{g(a)g(b)} = g(b).$$

Donc $f(b) = g(b)$ pour tout $b \in E$, donc $f = g$. □

Proposition IV.5.

Soit $\overrightarrow{f} \in L(\overrightarrow{E}, \overrightarrow{F})$. Pour tous $a \in E$ et $b \in F$, il existe une unique application affine f d'application linéaire associée $\overrightarrow{f}$ et telle que $f(a) = b$. Elle est définie pour tout $x \in E$ par :

$$f(x) = b + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{ax}).$$

Preuve : Par construction, $\overrightarrow{f(a)f(a+\overrightarrow{v})} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{a(a+\overrightarrow{v})}) = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{v})$ pour tout $\overrightarrow{v} \in \overrightarrow{E}$, donc f est affine d'application linéaire $\overrightarrow{f}$. De plus, $f(a) = b$.

Si g est une autre application affine vérifiant ces conditions, alors g a même partie linéaire que f et $f(a) = b = g(a)$, donc $f = g$ par la Propriété IV.4. □

Proposition IV.6.

Une application affine est caractérisée par son action sur un repère. Autrement dit, étant donnés deux espaces affines E et F, un repère $(a_0, \cdots, a_n)$ de E et un n-uplet de points $(b_0, \cdots, b_n)$ de F, il existe une unique application affine $f : E \to F$ telle que $f(a_k) = b_k$ pour tous $0 \leq k \leq n$.

Preuve : Montrons tout d'abord l'unicité. Si f est une telle application affine, alors $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{a_0a_k}) = \overrightarrow{f(a_0)f(a_k)} = \overrightarrow{b_0b_k}$ pour tout k. Or une application linéaire est caractérisée par son action sur une base, donc deux applications affines vérifiant cette propriété ont même partie linéaire, ainsi que la même image de a_0. Par la Proposition IV.5, deux telles applications affines coïncident.

De plus, si $\overrightarrow{f}$ est défini comme ci-dessus par son action sur la base $(\overrightarrow{a_0a_k})_{1\leq k\leq n}$ de $\overrightarrow{E}$, et si f et l'unique application affine telle que $f(a) = b_0 + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{a_0a})$, alors on vérifie que $f(a_k) = b_k$ pour tout $\leq k \leq n$. □

Exercice 17. Construisez l'image d'un point connaissant l'image d'un repère dans le plan. Vous pourrez utiliser Geogebra.

Propriété IV.7.

Soit f une application linéaire.

▷ *f est bijective (respectivement injective, surjective) si et seulement si $\overrightarrow{f}$ est bijective (respectivement injective, surjective).*

▷ *f est bijective (respectivement injective) si et seulement si l'image d'un repère de E est un repère de F (respectivement une famille affinement indépendante de F).*

Exercice 18. Démontrez chacune des 5 propriétés ci-dessus.

Coordonnées et écriture matricielle

Propriété IV.8.

Soient E et F deux espaces affines de dimension finie. Une application f de E dans F est une application affine si et seulement si pour tout $x \in E$, la matrice des coordonnées Y du point $f(x)$ dans un repère de F s'écrit sous la forme $Y = AX + B$ où X représente les coordonnées du point x dans un repère de E.

Preuve : Soient E, F deux espaces affines munis de repère $(a_0, \cdots, a_n)$ et $(b_0, \cdots, b_p)$ respectivement. Soit $f : E \to F$.

Supposons f affine. Soit B le vecteur coordonnée de $f(a_0)$ dans le repère $(b_0, \cdots, b_p)$ et soit A la matrice de $\overrightarrow{f}$ de la base $(\overrightarrow{a_0a_1}, \cdots, \overrightarrow{a_0a_n})$ dans la base $(\overrightarrow{b_0b_1}, \cdots, \overrightarrow{b_0b_p})$. Alors, pour tout $x \in E$,

$$f(x) = f(a_0) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{a_0x}) = b_0 + \overrightarrow{b_0f(a_0)} + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{a_0x})$$

a bien pour coordonnées $B + AX$.

Réciproquement, si f s'écrit sous la forme $Y = AX + B$, alors f coïncide avec l'application affine envoyant a_0 sur le point de coordonnées B dans le repère $(b_0, \cdots, b_p)$, et dont la partie linéaire est de matrice A dans les bases $(\overrightarrow{a_0a_1}, \cdots, \overrightarrow{a_0a_n})$ et $(\overrightarrow{b_0b_1}, \cdots, \overrightarrow{b_0b_p})$. □

Exemples d'applications affines

Les applications affines de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ sont exactement les fonctions de la forme $x \mapsto ax + b$, où a, b sont des réels. En effet, si on choisit le repère (O, I) avec $O = 0$ et $I = 1$, alors une application affine s'écrit en coordonnées $Y = aX + b$; mais, dans ce repère, $X = x$ et $Y = f(x)$.

Les **translations** sont des applications affines. En effet, soit t une translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ dans un espace affine E. Soit $a \in E$. Alors, pour tout $v \in \overrightarrow{E}$,

$$\overrightarrow{t(a)t(a+\overrightarrow{v})} = \overrightarrow{t(a)a} + \overrightarrow{a(a+\overrightarrow{v})} + \overrightarrow{(a+\overrightarrow{v})t(a+\overrightarrow{v})} = -\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} = \overrightarrow{v}.$$

En particulier, $\overrightarrow{t} = \mathrm{id}$: l'application linéaire associée est l'identité. En coordonnées, une translation s'écrit $Y = X + B$.

Exercice : Montrez la propriété suivante :

Propriété IV.9.

Une application affine est une translation si et seulement si son application linéaire associée est l'identité.

De nombreuses transformations usuelles du plan euclidien sont des applications affines. Par exemple, soit $P = (x_P, y_P)$ un point du plan et R_θ la rotation d'angle θ autour de P. Alors R_θ est une transformation affine, dont l'application linéaire associée est la rotation linéaire $\overrightarrow{r}_\theta$. Dans le repère canonique, étant donné un point Q de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$,

$$R_\theta(Q) = R_\theta(P + \overrightarrow{PQ}) = R_\theta(P) + \overrightarrow{r}_\theta(\overrightarrow{PQ}) = P + \overrightarrow{r}_\theta(\overrightarrow{PQ}).$$

On trouve donc :

$$R_\theta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_P \\ y_P \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - x_P \\ y - y_P \end{pmatrix}.$$

Cette écriture permet de repérer facilement les propriétés géométriques de R_θ : cette application fixe le point P, et agit par rotation. Si on veut la mettre sous la forme $Y = AX + B$, il faut réécrire :

$$R_\theta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_P - \cos(\theta)x_P + \sin(\theta)y_P \\ y_P - \sin(\theta)x_P - \cos(\theta)y_P \end{pmatrix},$$

mais cela est en général à éviter.

De même, les projections orthogonales sur une droite, les symétries axiales et les symétries centrales sont des applications affines. Les applications linéaires associées sont encore des projections orthogonales (linéaires), des réflexions, et $-\mathrm{id}$ dans le cas des symétries centrales. On dispose de même d'une notion d'*homothétie affine* :

Définition IV.10 (Homothétie affine)**.**

*Soit h une transformation affine de E. On dit que h est une **homothétie affine** si elle satisfait l'une des conditions équivalentes suivantes :*

1. *Il existe $c \in E$ et un réel $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ tels que $h(x) = c + \lambda\overrightarrow{cx}$ pour tout $x \in E$.*
2. *Il existe $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ tel que l'application linéaire associée à h est égale à λid.*

IV.2 Propriétés géométriques des applications affines

Propriétés liées à la structure d'espace affine

Propriété IV.11.

L'image d'un sous-espace affine par une application affine est un sous-espace affine de dimension au plus celle du sous-espace affine de départ.

L'image réciproque d'un sous-espace affine par une application affine est vide, ou est un sous-espace affine.

Preuve : Soient E, F deux espaces affines et $f : E \to F$ une application affine.

Soit $V \subset E$ un sous-espace affine. Soit $a \in V$. Posons $\overrightarrow{W} := \overrightarrow{f}(\overrightarrow{V})$. Alors, pour tout $b \in F$:

$$\begin{aligned} b \in f(V) &\iff \exists v \in V,\ b = f(v) \\ &\iff \exists \overrightarrow{v} \in \overrightarrow{V},\ b = f(a + \overrightarrow{v}) \\ &\iff \exists \overrightarrow{v} \in \overrightarrow{V},\ b = f(a) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{v}) \\ &\iff \exists \overrightarrow{w} \in \overrightarrow{W},\ b = f(a) + w \\ &\iff b \in f(a) + \overrightarrow{W}. \end{aligned}$$

Donc $f(V)$ est un sous-espace affine de direction $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{V})$, donc de dimension $\dim(\overrightarrow{f}(\overrightarrow{V})) \leq \dim(\overrightarrow{V})$.

Soit $W \subset F$ un sous-espace affine. Supposons $f(E) \cap W$ non vide ; soit alors $a \in f^{-1}(W)$. Posons $\overrightarrow{V} := \overrightarrow{f}^{-1}(\overrightarrow{W})$. Alors, pour tout $b \in F$:

$$\begin{aligned} b \in f^{-1}(W) &\iff f(b) \in W \\ &\iff \overrightarrow{f(a)f(b)} \in \overrightarrow{W} \\ &\iff \overrightarrow{f}(\overrightarrow{ab}) \in \overrightarrow{W} \\ &\iff \overrightarrow{ab} \in \overrightarrow{V} \\ &\iff b \in a + \overrightarrow{V}. \end{aligned}$$

Donc $f^{-1}(W)$ est un sous-espace affine de direction $\overrightarrow{f}^{-1}(\overrightarrow{W})$. □

Remarque IV.12.

En particulier, si $b \in F$ et $f : E \to F$ est affine, alors $f^{-1}(\{b\})$ est ou bien vide, ou bien un sous-espace affine de direction $\mathrm{Ker}(\overrightarrow{f})$.

Exercice 19. Donner la nature de l'image d'une droite affine, d'un plan affine. Que peut-on dire si f est bijective ?

Remarque IV.13 (Les applications affines préservent les parallélogrammes)**.**

L'image d'un parallélogramme par une application affine est toujours un parallélogramme. On dit aussi que f préserve les parallélogrammes.

La réciproque est vraie si E est un espace vectoriel réel (nous ne le démontrerons pas ici), mais fausse si E est espace vectoriel complexe. Par exemple, l'application $f : z \mapsto \overline{z}$ de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ préserve les parallélogrammes, mais n'est pas linéaire.

Preuve : Soit (a, b, c, d) un parallélogramme de E et f une application affine définie sur E. Alors $\overrightarrow{ab} = \overrightarrow{dc}$. Donc $\overrightarrow{f(a)f(b)} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{ab}) = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{dc}) = \overrightarrow{f(d)f(c)}$. Donc $(f(a), f(b), f(c), f(d))$ est un parallélogramme. □

Remarque IV.14 (Les applications affines préservent le parallélisme)**.**

Soient F, G deux sous-espaces affines d'un espace affine E. Si F et G sont parallèles (respectivement, si F est faiblement parallèle à G) et f est affine, alors $f(F)$ et $f(G)$ sont parallèles (respectivement, $f(F)$ et $f(G)$ sont faiblement parallèles).

Preuve : Si F et G sont parallèles, alors la direction de $f(G)$ est $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{G}) = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{F})$, donc est la même direction que $f(F)$.

Si F est faiblement parallèle à G, alors $f(F)$ a pour direction $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{F}) \subset \overrightarrow{f}(\overrightarrow{G})$, donc est faiblement parallèle à $f(G)$. □

Remarque IV.15 (Les applications affines préservent les milieux)**.**

Soient E, F deux espaces affines et $f : E \to F$ affine. Soient a, $b \in E$ de milieu m. Alors $f(m)$ est le milieu de $f(a)$ et $f(b)$.

Preuve : Sous ces hypothèses, $\overrightarrow{f(a)f(m)} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{am}) = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{mb}) = \overrightarrow{f(m)f(b)}$. □

Exercice 20. Montrez que les applications affines préservent les barycentres.

Le point de vue algébrique : le groupe affine $GA(E)$.

De la même façon qu'une composition d'applications linéaires est linéaire, une composition d'applications affines est affine.

Proposition IV.16.
Soient E, F, G trois espaces affines. Soient f une application affine de E dans F et g une application affine de F dans G. Alors $g \circ f$ est une application affine de E dans G dont l'application linéaire associée est égale à $\overrightarrow{g} \circ \overrightarrow{f}$.

Preuve : Soient $a \in E$ et $\overrightarrow{v} \in \overrightarrow{E}$. Alors

$$\overrightarrow{g \circ f(a) g \circ f(a+\overrightarrow{v})} = \overrightarrow{g(f(a))g(f(a) + \overrightarrow{f(a)f(a+\overrightarrow{v})})} = \overrightarrow{g}\left(\overrightarrow{f(a)f(a+\overrightarrow{v})}\right) = \overrightarrow{g}\,\overrightarrow{f}(\overrightarrow{v})$$

□

En particulier, si E est un espace affine, alors l'ensemble des applications affines de E dans E est stable par composition. Dans ce qui suit, on fixe un espace affine E de direction $\overrightarrow{E}$.

Définition IV.17 (Groupe affine)**.**

- ▷ *Une **transformation affine** est une application affine de E dans lui-même.*
- ▷ *Le **groupe affine de** E est l'ensemble des **transformations bijectives** de E qu'on appelle aussi les **automorphismes de** E. C'est un groupe que l'on notera $GA(E)$.*

Preuve : Il faut tout de même montrer que $GA(E)$ est un groupe. On sait que l'identité est une transformation affine bijective, et qu'une composition de transformations affines bijective est affine et bijective. Il reste à montrer que, si f est transformation affine bijective, alors son inverse f^{-1} est affine.

Soient $a \in E$. On sait que $\overrightarrow{f} \in GL(\overrightarrow{E})$. Il existe donc une transformation affine $g \in GA(E)$ telle que $g(f(a)) = a$ et $\overrightarrow{g} = (\overrightarrow{f})^{-1}$. De plus, $(g \circ f)(a) = a$ et $\overrightarrow{g \circ f} = \overrightarrow{g} \circ \overrightarrow{f} = \overrightarrow{\mathrm{id}}$. Donc $g \circ f$ est l'unique transformation affine envoyant a sur a et de partie linéaire $\overrightarrow{\mathrm{id}}$, donc $g \circ f = \mathrm{id}$. □

Remarque IV.18.

- ▷ *À une transformation affine f de E est associée un endomorphisme $\overrightarrow{f}$ de $\overrightarrow{E}$.*
- ▷ *Si f est un automorphisme de E, alors f est bijective, donc son endomorphisme associé $\overrightarrow{f}$ est aussi bijectif, donc $\overrightarrow{f} \in GL(\overrightarrow{E})$.*
- ▷ *L'application $f \mapsto \overrightarrow{f}$ est un morphisme surjectif de $GA(E)$ dans $GL(E)$. Son noyau est le groupe des translations $T(E)$; en particulier, $T(E)$ est distingué dans $GA(E)$.*

Preuve : Le fait que $\Psi : \ f \mapsto \overrightarrow{F}$ est un morphisme de groupes est une conséquence de la Proposition IV.16. La surjectivité de ce morphisme est une conséquence de la Proposition IV.5. Finalement, soit $a \in E$. Alors

$$\begin{aligned} f \in \mathrm{Ker}(\Psi) \iff & \overrightarrow{f} = id \\ & \forall b \in E,\ \overrightarrow{f(a)f(b)} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{ab}) = \overrightarrow{ab} \\ & \forall b \in E,\ \overrightarrow{bf(b)} = \overrightarrow{ba} + \overrightarrow{af(b)} = \overrightarrow{f(b)f(a)} + \overrightarrow{af(b)} = \overrightarrow{af(a)} \\ & \exists \overrightarrow{v} \in \overrightarrow{E},\ \forall b \in E,\ f(b) = t_{\overrightarrow{v}}(b). \end{aligned}$$

Donc le noyau de $f \mapsto \overrightarrow{F}$ est bien le groupe des translations. $\square$

La notion de point fixe permettra, par la suite, une description plus simple des transformations affines d'un espace affine.

Définition IV.19.

Soit f une transformation affine de E.

- *Un **point fixe** x de f est un point qui est égal à son image : $f(x) = x$.*
- *Un ensemble A de E est dit **invariant** par f si son image est égale à lui-même : $f(A) = A$.*
- *On dit que A est **stable** par f si $f(A) \subset A$.*

Exercice 21. Donnez des exemples d'applications affines admettant un ou plusieurs points fixes; n'admettant pas de points fixes mais des ensembles stables. Donner des exemples d'ensembles stables mais pas invariants.

Théorème IV.20.

Soit f une transformation affine d'un espace affine E.

1. *f admet un unique point fixe si et seulement si 1 n'est pas valeur propre de $\overrightarrow{f}$.*
2. *Si 1 est valeur propre de f, l'ensemble des points fixes de f est soit vide, soit un sous-espace affine de E de direction $\operatorname{Ker}(\overrightarrow{f} - \overrightarrow{\mathrm{id}})$.*

Preuve : Supposons que 1 est valeur propre de $\overrightarrow{f}$, et que f admette un point fixe a. Alors :

$$\begin{aligned} f(b) = b &\iff \overrightarrow{af(b)} = \overrightarrow{ab} \\ &\iff \overrightarrow{f(a)f(b)} = \overrightarrow{ab} \\ &\iff \overrightarrow{f}(\overrightarrow{ab}) = \overrightarrow{ab} \\ &\iff \overrightarrow{ab} \in \operatorname{Ker}(\overrightarrow{f} - \overrightarrow{\mathrm{id}}). \end{aligned}$$

Donc b est un point fixe de f si et seulement si $b \in a + \operatorname{Ker}(\overrightarrow{f} - \overrightarrow{\mathrm{id}})$. Autrement dit, si 1 est valeur propre de $\overrightarrow{f}$, alors ou bien f n'a aucun point fixe, ou bien l'ensemble des points fixes de f est un sous-espace affine de direction $\operatorname{Ker}(\overrightarrow{f} - \overrightarrow{\mathrm{id}})$, et en particulier est infini.

Supposons que f ait un unique point fixe. Alors, par ce qui précède, 1 n'est pas valeur propre de $\overrightarrow{f}$.

Finalement, supposons que 1 n'est pas valeur propre de $\overrightarrow{f}$. Soit $a \in E$. Alors $\overrightarrow{f} - \overrightarrow{\mathrm{id}}$ est inversible. Posons $b := a + (\overrightarrow{f} - \overrightarrow{\mathrm{id}})^{-1}(\overrightarrow{f(a)a})$. Alors

$$\begin{aligned} f(b) &= f(a) + \overrightarrow{f(a)f(b)} \\ &= f(a) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{ab}) \\ &= f(a) + \overrightarrow{f}((\overrightarrow{f} - \overrightarrow{\mathrm{id}})^{-1}(\overrightarrow{f(a)a})) \\ &= f(a) + (\overrightarrow{f} - \overrightarrow{\mathrm{id}})^{-1}(\overrightarrow{f(a)a}) + \overrightarrow{f(a)a} \\ &= a + (\overrightarrow{f} - \overrightarrow{\mathrm{id}})^{-1}(\overrightarrow{f(a)a}) \\ &= b. \end{aligned}$$

Donc b est un point fixe de f. $\square$

V Classes de transformations affines

V.1 Quelques sous-groupes de $GA(E)$

Le groupe $GA(E)$ admet de nombreux sous-groupes intéressants.

Propriété V.1. *Soit E un espace affine et $a \in E$. Alors le sous-ensemble des applications affines dont a est un point fixe est un sous-groupe de $GA(E)$ isomorphe à $GL(\overrightarrow{E})$.*

Preuve : Notons cet ensemble $\mathrm{Stab}(a) = \{f \in GA(E);\ f(a) = a\}$. Alors cet ensemble contient l'identité, est stable par compositions et inverses. C'est donc un sous-groupe de $GA(E)$.

Étant donné $\overrightarrow{g} \in GL(\overrightarrow{E})$, il existe une unique application affine $f \in GA(E)$ telle que $\overrightarrow{f} = \overrightarrow{g}$ et $f(a) = a$. Le morphisme $f \mapsto \overrightarrow{f}$ de $\mathrm{Stab}(a)$ dans $GL(\overrightarrow{E})$ est donc bijectif ; c'est un isomorphisme. □

Ceci dit, la méthode la plus générale consiste à choisir un sous-groupe H de $GL(\overrightarrow{E})$, et à considérer les applications affines $f \in GA(E)$ telles que $\overrightarrow{f} \in H$. Rappelons au passage le lemme suivant :

Lemme V.2. *Soient G, H deux groupes, $\psi : G \to H$ un morphisme de groupe et K un sous-groupe de H. Alors $\psi^{-1}(K)$ est un sous-groupe de G. De plus, si K est distingué dans H, alors $\psi^{-1}(K)$ et distingué dans G.*

On utilisera ce lemme avec $G = GA(E)$, $H = GL(\overrightarrow{E})$ et $\psi : f \mapsto \overrightarrow{f}$. Ainsi :

- ▷ $\{\overrightarrow{\mathrm{id}}\}$ est un sous-groupe distingué de $GL(\overrightarrow{E})$. Donc l'ensemble $\{f \in GA(E);\ \overrightarrow{f} = \overrightarrow{\mathrm{id}}\}$ est un sous-groupe distingué de $GA(E)$. C'est le groupe des **translations** $T(E)$.
- ▷ $\{\lambda\overrightarrow{\mathrm{id}};\ \lambda \in \mathbb{R}^*\}$ est un sous-groupe distingué de $GL(\overrightarrow{E})$ (groupe des homothéties). Donc l'ensemble $\{f \in GA(E);\ \overrightarrow{f} = \lambda\overrightarrow{\mathrm{id}}, \lambda \in \mathbb{R}^*\}$ est un sous-groupe distingué de $GA(E)$. C'est le groupe des **homothéties-translations** $HT(E)$.
- ▷ $\{f :\ \det(f) = 1\}$ est un sous-groupe distingué de $GL(\overrightarrow{E})$ (groupe spécial linéaire, ou groupe des applications linéaires préservant l'orientation et l'aire). Donc l'ensemble $\{f \in GA(E);\ \det(\overrightarrow{f}) = 1\}$ est un sous-groupe distingué de $GA(E)$. C'est le groupe des applications affines préservant l'orientation et l'aire.
- ▷ Si l'on munit $\overrightarrow{E}$ d'un produit scalaire, alors $O(\overrightarrow{E})$ est un sous-groupe de $GL(\overrightarrow{E})$ (groupe orthogonal, ou groupe des isométries). L'ensemble $\{f \in GA(E);\ \overrightarrow{f} \in O(\overrightarrow{E})\}$ est un sous-groupe de $GA(E)$.

Remarquons que, avec cette construction, le sous-groupe de $GA(E)$ obtenu contiendra toujours $\{f \in GA(E);\ \overrightarrow{f} = \overrightarrow{\mathrm{id}}\}$, c'est-à-dire les translations. En particulier, les translations préservent les aires, les distances...

V.2 Groupe $HT(E)$ des homothéties-translations d'un espace affine E

Revenons maintenant sur les homothéties et translations.

Propriété V.3.

1. *Les translations sont bijectives.*

2. *Les translations préservent les directions.*
3. *Une translation non triviale n'a pas de point fixe.*
4. *Une translation est définie de manière unique par un point et son image.*
5. $T(E)$ *est un groupe commutatif pour la loi de composition, isomorphe à* $\overrightarrow{E}$.

Exercice 22. Traduisez mathématiquement chacune de ces propriétés, puis démontrez celles qui sont nouvelles.

Définition V.4 (Homothétie affine)**.**
Soit h *une transformation affine de* E. *On dit que* h *est une* ***homothétie affine*** *si elle satisfait l'une des conditions équivalentes suivantes :*

1. *Il existe* $c \in E$ *et un réel* $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$ *tels que* $h(x) = c + \lambda\overrightarrow{cx}$ *pour tout* $x \in E$.
2. *Il existe* $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$ *tel que l'application linéaire associée à* h *est égale à* $\lambda\overrightarrow{\mathrm{id}}$.

Remarquons qu'il est naturel d'ajouter les translations aux homothéties. En effet, la composée de deux homothéties affines peut être une translation ; plus précisément, si f et une homothétie affine de rapport λ et g une homothétie affine de rapport $1/\lambda$, alors $g \circ f$ est une translation. Réciproquement, toute translation est composée de deux homothéties.

Propriété V.5.

1. *Les homothéties affines sont bijectives.*
2. *Les homothéties affines préservent les directions.*
3. *Une homothétie affine admet un unique point fixe, appelé son* ***centre****.*
4. *Une homothétie affine est définie de manière unique par deux points distincts et leurs images.*
5. $HT(E)$ *est un groupe pour la loi de composition. En particulier, la composée de deux homothéties affines est une homothétie ou une translation.*

PREUVE : Une homothétie affine est bijective car sa partie linéaire est bijective.

Une homothétie affine préserve les directions car sa partie linéaire est une homothétie, et les homothéties préservent les directions.

Une homothétie affine n'a pas 1 comme valeur propre de sa partie linéaire, donc admet un unique point fixe.

Une transformation affine est caractérisée par sa partie linéaire et l'image d'un point. De plus, la partie linéaire d'une homothétie affine est de la forme $\lambda\overrightarrow{\mathrm{id}}$, donc est caractérisée par l'image d'un vecteur, donc de deux points.

Soit $\Psi : f \mapsto \overrightarrow{f}$ le morphisme qui a un automorphisme affine associe sa partie linéaire. Alors $T(E) = \Psi^{-1}(\overrightarrow{\mathrm{id}})$, et l'ensemble des homothéties affines est par définition $\Psi^{-1}(\{\lambda\overrightarrow{\mathrm{id}},\ \lambda \in \mathbb{R}\setminus\{0,1\}\})$. Par conséquent, $HT(E) = \Psi^{-1}(\{\lambda\overrightarrow{\mathrm{id}},\ \lambda \in \mathbb{R}_+^*\})$. Or $\{\lambda\overrightarrow{\mathrm{id}},\ \lambda \in \mathbb{R}_+^*\}$ est un sous-groupe de $GL(\overrightarrow{E})$, donc $HT(E)$ est un sous-groupe de $GA(E)$. □

Exercice 23. Le groupe des homothéties-translations, contrairement au groupe des homothéties vectorielles ou au groupe des translations, n'est en général pas commutatif : pouvez-vous en donner des exemples ?

Exercice 24. Soient a, b deux points du plan. Donner une condition sur a', b' pour qu'il existe une homothétie h telle que $h(a) = a'$ et $h(b) = b'$. Construire le centre de h dans ce cas.

Exercice 25. Montrer qu'une transformation affine du plan qui préserve trois directions deux à deux distinctes est une homothétie ou une translation.

Propriété V.6.
$HT(E)$ est l'ensemble des applications affines de E qui préservent les directions des droites affines.

Preuve : On sait déjà que les homothéties-translations préservent les directions des sous-espaces affines, donc en particulier des droites affines.

Soit f une transformation affine qui préserve les directions des droites affines. Soit $\mathscr{B} = (e_i)_{1\leq i\leq n}$ une base de $\overrightarrow{E}$. Alors la matrice de $\overrightarrow{f}$ dans $\mathscr{B}$ est diagonale ; soient $(\lambda_i)_{1\leq i\leq n}$ ses coefficients diagonaux. Les λ_i sont tous non nuls car f est bijective, donc $\overrightarrow{f}$ aussi. Pour tous $i \neq j$, le vecteur $f(e_i + e_j) = \lambda_i e_i + \lambda_j e_j$ est colinéaire à $(e_i + e_j)$, donc à $\lambda_i(e_i + e_j)$. Par conséquent, $(\lambda_i - \lambda_j)e_j$ est aussi colinéaire à $e_i + e_j$, donc $\lambda_i = \lambda_j$. Ceci étant valable pour tous $i \neq j$, la matrice de $\overrightarrow{f}$ est proportionnelle à la matrice identité, donc f est une homothétie-translation. □

Exercice 26. Expliquez la distinction entre "préserver les directions" et "préserver le parallélisme".

V.3 Espaces affines euclidiens et isométries

Si l'on peut munir un espace vectoriel d'une norme, on peut munir un espace affine d'une distance, en faisant un espace métrique.

Proposition V.7.
Soit E un espace affine et $\langle\cdot,\cdot\rangle$ un produit scalaire sur $\overrightarrow{E}$. L'application $d : E \times E \to \mathbb{R}_+$ définie par $d(x, y) := \|\overrightarrow{xy}\|$ est une distance sur E.

Preuve : La fonction d est positive, symétrique car la norme est symétrique, définie car la norme est définie, et satisfait l'inégalité triangulaire car la norme la satisfait. □

Proposition V.8.
Soit E un espace affine et $\langle\cdot,\cdot\rangle$ un produit scalaire sur $\overrightarrow{E}$. Soit $f : E \to E$ une application affine.
Alors f est une isométrie de E si et seulement si $\overrightarrow{f} \in O(\overrightarrow{E})$.

Preuve : Soient a, $b \in E$. Alors

$$d(f(a), f(b)) = \left\|\overrightarrow{f(a)f(b)}\right\| = \left\|\overrightarrow{f}\,\overrightarrow{ab}\right\|$$

Donc $d(f(a), f(b)) = d(a, b)$ pour tous a, $b \in E$ si et seulement si $\left\|\overrightarrow{f}\,\overrightarrow{u}\right\| = \|\overrightarrow{u}\|$ pour tout $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{E}$, donc si et seulement si $\overrightarrow{f} \in O(\overrightarrow{E})$. □

Par exemple, en dimension 2, les isométries sont de l'un des trois types suivants :

▷ les translations (transformations affines dont la partie linéaire est $\overrightarrow{\mathrm{id}}$) ;

- les transformations affines dont la partie linéaire est une rotation d'angle non nul. Les valeurs propres d'une rotation d'angle non nul sont différentes de 1, donc une telle transformation a un unique point fixe. Il s'agit donc des rotations autour d'un point.
- les transformations affines f dont la partie linéaire est une réflexion. Cependant, cet ensemble est plus gros que l'ensemble des symétries axiales ! En effet, 1 est valeur propre de multiplicité 1 d'une réflexion du plan. On a donc une dichotomie :
  - Ou f a un point fixe, auquel cas l'ensemble des points fixes est de dimension 1, donc une droite. Alors f est une *symétrie axiale*, dont l'axe est cette droite.
  - Ou f n'a pas de point fixe, auquel cas f est une *symétrie glissée*. Nous allons revenir sur ces transformations dans la suite de ce chapitre.

Remarque V.9.

Dans $GL_2(\mathbb{R})$, la composition d'une rotation $\overrightarrow{r}_\theta$ d'angle θ avec une rotation $\overrightarrow{r}_{-\theta}$ d'angle $-\theta$ est l'identité. Par conséquent, en géométrie affine du plan, la composition d'une rotation affine R_1 d'angle θ centrée en P avec une rotation affine R_2 d'angle $-\theta$ centrée en Q est une application affine dont la partie linéaire est l'identité, c'est-à-dire une translation. On peut montrer, plus précisément, qu'il s'agit de la translation de vecteur $\overrightarrow{PR_2(P)}$ (exercice !). En particulier, en prenant $\theta = \pi$, on montre que la composée de deux symétries centrales est translation.

De la même façon, la composée de deux symétries axiales d'axes parallèles est une translation.

Dans l'espace, la classification des isométries affines devient plus compliquée, mais fait intervenir par exemple des "rotations glissées".

V.4 Projections affines et projections glissées

Soient $\overrightarrow{F}$ et $\overrightarrow{G}$ deux sous-espaces vectoriel supplémentaires dans $\overrightarrow{E}$. Rappelons que la projection linéaire $\overrightarrow{p}$ sur $\overrightarrow{F}$ parallèlement à $\overrightarrow{G}$ est l'unique application linéaire telle que, pour tout $\overrightarrow{v} \in \overrightarrow{E}$,

- $\overrightarrow{p}(\overrightarrow{v}) \in \overrightarrow{F}$;
- $\overrightarrow{v} - \overrightarrow{p}(\overrightarrow{v}) \in \overrightarrow{G}$.

Définition V.10.

Soient $\overrightarrow{F}$ et $\overrightarrow{G}$ deux sous-espaces vectoriel supplémentaires dans $\overrightarrow{E}$. Soit F un sous-espace affine de direction $\overrightarrow{F}$. On appelle ***projection sur F parallèlement à $\overrightarrow{G}$*** *l'application qui à tout point x dans E associe le point $p(x)$ tel que*

- *$p(x) \in F$;*
- *$\overrightarrow{xp(x)} \in \overrightarrow{G}$.*

De plus, cette application est une transformation affine.

On appelle ***projection glissée*** *une transformation affine dont la partie linéaire est une projection.*

Preuve : Soit $\overrightarrow{p}$ la projection linéaire sur $\overrightarrow{F}$ parallèlement à $\overrightarrow{G}$. Soit $a \in F$. Soit p l'application affine de partie linéaire $\overrightarrow{p}$ et telle que $p(a) = a$. Alors :

- Soit $x \in E$. Alors $p(x) = p(a) + \overrightarrow{p}(\overrightarrow{ax}) \in a + \overrightarrow{F} = F$, donc $p(x) \in F$.

▷ Soit $x \in E$. Alors $\overrightarrow{xp(x)} = \overrightarrow{xd} + \overrightarrow{ap(x)} = \overrightarrow{xd} + \overrightarrow{p}(\overrightarrow{ax})$ est dans l'image de $\overrightarrow{\mathrm{id}} - \overrightarrow{p}$, donc dans $\overrightarrow{G}$.

Une telle application existe donc ; montrons qu'elle est unique. Soit q une telle application. Soit $x \in E$. Alors $q(x)$ appartient à l'intersection des sous-espaces affines F et $x+\overrightarrow{G}$. Or, les sous-espaces vectoriels $\overrightarrow{F}$ et $\overrightarrow{G}$ étant supplémentaires, cette intersection existe et est un singleton. Ceci démontre l'unicité de q. En particulier, si q est une telle application, alors q est l'application construite au début de cette démonstration, donc est affine. □

Propriété V.11.

1. *Les projections sont des projections glissées.*
2. *L'ensemble des points fixes de la projection sur F parallèlement à $\overrightarrow{G}$ est égal à F.*
3. *Une application affine p est une projection si et seulement si elle admet un point fixe et $\overrightarrow{p}$ est une projection vectorielle.*
4. *Si une application affine $p : E \to E$ vérifie $p \circ p = p$, alors c'est une projection.*

Preuve : Le premier point suit directement de la démonstration précédente. Passons au deuxième point. Soit $a \in F$. Alors p est l'application affine telle que $p(a) = a$ et $\overrightarrow{p}$ est la projection sur $\overrightarrow{F}$ parallèlement à $\overrightarrow{G}$. Mais alors, pour tout $b \in E$,

$$p(b) = b \iff \overrightarrow{p}(\overrightarrow{ab}) = \overrightarrow{ab} \iff \overrightarrow{ab} \in \overrightarrow{F} \iff b \in F,$$

donc F est l'ensemble des points fixes de p.

Si p est une projection affine, alors elle a au moins un point fixe par ce qui précède, et sa partie linéaire est une projection vectorielle. Réciproquement, par construction, si p a un point fixe et si sa partie linéaire est une projection vectorielle, alors p est une projection.

Soit p une application affine telle que $p \circ p = p$. Alors $\overrightarrow{p} \circ \overrightarrow{p} = \overrightarrow{p}$, donc $\overrightarrow{p}$ est une projection vectorielle. De plus, soit $a \in E$. Alors $p(p(a)) = p(a)$, donc $p(a)$ est un point fixe de p. Donc, par le point précédent, p est une projection. □

En particulier, il y a des projections glissées qui ne sont pas des projections, comme par exemple les translations.

Exercice 27. Construisez d'autres exemples de projections glissées qui ne sont pas des translations.

V.5 Symétries affines et symétries glissées

Soient $\overrightarrow{F}$ et $\overrightarrow{G}$ deux sous-espaces vectoriel supplémentaires dans $\overrightarrow{E}$. Rappelons que la symétrie linéaire $\overrightarrow{s}$ par rapport à $\overrightarrow{F}$ parallèlement à $\overrightarrow{G}$ est l'unique application linéaire telle que, pour tout $\overrightarrow{v} \in \overrightarrow{E}$,

▷ $\overrightarrow{v} + \overrightarrow{s}(\overrightarrow{v}) \in \overrightarrow{F}$;

▷ $\overrightarrow{v} - \overrightarrow{s}(\overrightarrow{v}) \in \overrightarrow{G}$.

Définition V.12.

La symétrie s par rapport à F et parallèlement à $\overrightarrow{G}$ est l'application de E dans E telle que, pour tout $x \in E$, *1. le milieu de $(x, s(x))$ est un point de F,*

2. $\overrightarrow{xs(x)} \in \overrightarrow{G}$.

*On appelle **symétrie glissée** une transformation affine dont la partie linéaire est une symétrie.*

Preuve : Soit $\overrightarrow{s}$ la symétrie linéaire sur $\overrightarrow{F}$ parallèlement à $\overrightarrow{G}$. Soit $a \in F$. Soit s l'application affine de partie linéaire $\overrightarrow{s}$ et telle que $s(a) = a$. Alors :

- ▷ Soit $x \in E$. Alors $x + 1/2 \cdot \overrightarrow{xs(x)} = a + 1/2 \cdot \overrightarrow{ax} + 1/2 \cdot \overrightarrow{s}(\overrightarrow{ax}) \in a + \overrightarrow{F} = F$, donc le milieu de $(x, s(x))$ appartient à F.
- ▷ Soit $x \in E$. Alors $\overrightarrow{xs(x)} = \overrightarrow{xa} + \overrightarrow{as(x)} = \overrightarrow{xa} + \overrightarrow{s}(\overrightarrow{ax})$ est dans l'image de $\mathrm{id} - \overrightarrow{s}$, donc dans $\overrightarrow{G}$.

Une telle application existe donc ; montrons qu'elle est unique. Soit t une telle application. Soit $x \in E$. Alors $t(x)$ appartient à l'intersection des sous-espaces affines $x + \overrightarrow{F}$ et $x + \overrightarrow{G}$. Or, les sous-espaces vectoriels $\overrightarrow{F}$ et $\overrightarrow{G}$ étant supplémentaires, cette intersection existe et est un singleton. Ceci démontre l'unicité de t. En particulier, si t est une telle application, alors t est l'application construite au début de cette démonstration, donc est affine. □

Propriété V.13.

1. Les symétries sont des symétries glissées.

2. Les symétries glissées sont bijectives.

3. L'ensemble des points fixes de la symétrie par rapport à F parallèlement à $\overrightarrow{G}$ est égal à F.

4. Une application affine s est une symétrie si et seulement si elle admet un point fixe et $\overrightarrow{s}$ est une symétrie vectorielle.

5. Si une application affine $s : E \to E$ vérifie $s \circ s = s$, alors c'est une symétrie.

Preuve : Le premier point suit directement de la démonstration précédente, et le deuxième point vient du fait que la partie linéaire d'une symétrie glissée est une symétrie, donc est bijective. Passons au troisième point. Soit $a \in F$. Alors s est l'application affine telle que $s(a) = a$ et $\overrightarrow{s}$ est la symétrie par rapport à $\overrightarrow{F}$ parallèlement à $\overrightarrow{G}$. Mais alors, pour tout $b \in E$,

$$p(b) = b \iff \overrightarrow{s}(\overrightarrow{ab}) = \overrightarrow{ab} \iff \overrightarrow{ab} \in \overrightarrow{F} \iff b \in F,$$

donc F est l'ensemble des points fixes de s.

Si s est une symétrie affine, alors elle a au moins un point fixe par ce qui précède, et sa partie linéaire est une symétrie vectorielle. Réciproquement, par construction, si s a un point fixe et si sa partie linéaire est une symétrie vectorielle, alors s est une symétrie affine.

Soit s une application affine telle que $s \circ s = \mathrm{id}$. Alors $\overrightarrow{s} \circ \overrightarrow{s} = \overrightarrow{s}$, donc $\overrightarrow{s}$ est une symétrie vectorielle. De plus, soit $a \in E$ et m le milieu de a et $s(a)$. Alors, comme s est affine, s préserve les milieux, donc $s(m)$ est le milieu de $s(a)$ et de $s(s(a)) = a$, donc $s(m) = m$ est un point fixe de s. Donc, par le point précédent, s est une symétrie affine. □

En particulier, il y a des symétries glissées qui ne sont pas des symétries, comme par exemple les translations.

Exercice 28. Construisez d'autres exemples de symétries glissées qui ne sont pas des symétries.