L3MATH
MEU302 | Université Paris-Saclay
2022-2023

Feuille d'exercices 3 : Espaces euclidiens / Espaces affines

Exercice 1. Dans $\mathbb{R}^3$, soit p le projecteur orthogonal sur $\mathcal{P}$ d'équation $x+2y-2z=0$ et u le vecteur $u=(1,1,1)$. Déterminer l'image $p(u)$ de u. En déduire la distance $d(u,\mathcal{P})$.

Exercice 2. Soit $M=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}1 & 8 & -4\\ 8 & 1 & 4\\ -4 & 4 & 7\end{pmatrix}$ et soit f l'application linéaire associée à M dans la base canonique. Montrer que f est une isométrie et préciser sa nature.

Exercice 3. Pour $A,B\in M_n(\mathbb{R})$, on définit $\varphi(A,B)=\mathrm{Tr}({}^tAB)$. Montrer que φ définit un produit scalaire sur $M_n(\mathbb{R})$.

Exercice 4. *(D'après le partiel 2020)*

1. Dans $\mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire usuel, démontrer que pour tout $u,v\in\mathbb{R}^2$ de norme 1, il existe une unique réflexion r telle que $r(u)=v$. Préciser ses éléments caractéristiques.
2. Lorsque $u=(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2})$ et $v=(-1,0)$, représenter ces éléments caratéristiques sur un schéma, puis donner la matrice associée à la réflexion dans la base canonique.

Exercice 5. *(D'après le partiel 2020)*
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien de dimension n. Soient u,v deux vecteurs orthogonaux non nuls de E et de norme 1. On note F le sous-espace vectoriel engendré par u et v. Pour tout $x\in E$, on pose

$$f(x)=x-<u,x>u-<v,x>v.$$

1. Montrer que pour tout x, $f(x)\in F^\perp$.
2. Montrer que f est une projection orthogonale et préciser ses caractéristiques géométriques.
3. Dans $\mathbb{R}^3$, on choisit $u=(1,1,1)$ et $v=(1,-1,1)$. En adaptant le résultat précédent, exprimer à l'aide de u et v la projection orthogonale de mêmes caractéristiques que dans la question précédente.

Exercice 6. Soit $y\in\mathbb{R}^n$ tel que $\|y\|=1$. Pour tout x de $\mathbb{R}^n$, on pose

$$f(x)=x-2\langle x,y\rangle y.$$

1. Montrer que f est une isométrie et préciser sa nature.
2. On choisit $n=3$ et $y=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Existe-t-il une base dans laquelle la matrice de f s'écrit simplement ? Comment obtenir alors la matrice de f dans la base canonique ?

Exercice 7. Soit (u,v) une famille orthonormée de vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Pour tout x de $\mathbb{R}^n$, on pose

$$f(x)=x-\langle x,u+v\rangle u-\langle x,v-u\rangle v.$$

Montrer que f est une isométrie et préciser sa nature. Donner sa matrice dans une base bien choisie.

Exercice 8. ($\star$) Soit p un projecteur d'un espace vectoriel euclidien E. Montrer que p est orthogonal si et seulement si pour tout $x\in E$, $\|p(x)\|\le\|x\|$.

Exercice 9. ($\star$?)

1. Soit $\alpha\in\mathbb{R}$. Montrer que pour $P,Q\in\mathbb{R}_n[X]$,
$$\varphi(P,Q)=\sum_{k=0}^{n}P^{(k)}(\alpha)Q^{(k)}(\alpha)$$
où $P^{(k)}$ désigne la dérivée k-ième de P, définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Montrer qu'il existe une unique base $(P_0,\dots,P_n)$ orthonormale pour le produit scalaire φ telle que chaque P_i soit de degré i et de terme de degré maximal positif.
3. Calculer $P_i^{(k)}(\alpha)$ pour tout $k\in\mathbb{N}$.

1. Systèmes d'équations affines

Exercice 10. On note F l'ensemble des $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ vérifiant le système d'équations suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & y & + & 3z & = & 1, \\ x & + & 4y & - & 6z & = & -2. \end{array}\right.$$

1. Montrer que F est un sous-espace affine de $\mathbb{R}^3$ et préciser sa direction $\overrightarrow{F}$. Quelle est la nature de F ? Donner une équation paramétrique de F.
2. Écrire ce système sous forme matricielle, puis à l'aide d'une application linéaire f. Identifier le sous-espace affine F à l'aide de f.
3. Interpréter le système d'équations à l'aide d'hyperplans.

Exercice 11. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ un paramètre.

1. À quelles conditions sur λ les deux systèmes d'équations

$$\left\{\begin{array}{lcl} -x+\lambda y-3z & = & \lambda-1 \\ x-3y+\lambda z & = & -2 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{lcl} y+z & = & -\lambda+2 \\ \lambda x-2z & = & 0 \end{array}\right.$$

   décrivent-ils des droites affines de $\mathbb{R}^3$?
2. On suppose les conditions du 1. satisfaites. Trouver pour chaque droite son équation paramétrique.
3. Etudier selon la valeur de λ les positions relatives de ces 2 droites. On précisera lorsqu'elles sont parallèles, confondues, sécantes.

Exercice 12. Soient α, β, a, b, c des réels. On considère trois plans P_1, P_2 et P_3 de $\mathbb{R}^3$, d'équations respectives : $x+2y+\beta z = a$, $2x+4y = b$ et $\alpha x + (\alpha+1)y = c$. Déterminer, suivant les valeurs de α, β, a, b, c, la dimension du sous-espace affine $P_1 \cap P_2 \cap P_3$ (si cette intersection est non vide).

Exercice 13. On note F l'ensemble des quintuplets $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5$ vérifiant le système d'équations affine suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & & & = & 1, \\ x_1 & - & x_2 & & & + & x_4 & - & x_5 & = & 1, \\ -x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & - & x_4 & + & 2x_5 & = & -1. \end{array}\right.$$

Montrer que F est un sous-espace affine de $\mathbb{R}^5$, donner sa dimension, sa direction $\overrightarrow{F}$ et une base de celle-ci.

2. Droites et plans dans $\mathbb{R}^3$

Exercice 14. On se place dans $\mathbb{R}^3$.

1. Déterminer une équation du plan V engendré par les vecteurs $(1,2,1)$ et $(0,1,1)$ et passant par l'origine.
2. Déterminer une équation du plan V' parallèle à V et passant par le point $(0,0,1)$. Quelle est son équation paramétrique ?
3. Soit D la droite passant par $(1,0,0)$ et dirigée par le vecteur $(1,0,1)$. Déterminer les points d'intersection de V' et de D.

Exercice 15. Déterminer une équation de la droite de $\mathbb{R}^3$ passant par les points $(1,1,1)$ et $(1,0,2)$.

Exercice 16. Dans l'espace $\mathbb{R}^3$, on considère le plan P d'équation $x+y+z=1$.

1. Déterminer une équation de plan P' passant par les points $(2,-1,0)$, $(0,0,2)$ et $(-1,1,2)$.
2. Déterminer la nature de $\overrightarrow{P} \cap \overrightarrow{P'}$.
3. Déduire de la question précédente que $P \cap P'$ est non vide, et préciser sa nature.
4. Déterminer les caractéristiques géométriques de $P \cap P'$ (point et base de sa direction).

3. Autres exemples d'espaces affines

Exercice 17. Déterminer parmi les sous-ensembles suivants ceux qui sont des sous-espaces affines de $\mathbb{R}^3$ et préciser alors leurs directions et leurs dimensions.

1. $V_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x + 2y + z = 1\}$
2. $V_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x + 2y + z = 1 \text{ et } x = y = 0\}$
3. $V_3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 = 1\}$
4. $V_4 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + 2xy + y^2 = 0\}$
5. $V_5 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + 2xy + y^2 = 1\}$

Exercice 18. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note E_n l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui sont polynomiales de degré inférieur ou égal à n. Soit $F_0 = \{f \in E_n, \int_0^1 f(t)dt = 0\}$ et $F_1 = \{f \in E_n, \int_0^1 f(t)dt = 1\}$.

1. Montrer que F_0 est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
2. Montrer que F_1 est un espace affine dont l'espace vectoriel sous-jacent est F_0. Quelle est la dimension de F_1 ?
3. On suppose $n = 4$. Montrer que la partie V de F_1 formée des polynômes divisibles par $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2$ est un plan affine de F_1.

Exercice 19. Soit a et b deux réels. Montrer que les suites de réels $(u_n)_{n\geq 0}$ vérifiant $u_{n+1} = au_n + b$ pour tout $n \geq 0$ est un sous-espace affine de l'espace vectoriel des suites réelles. Préciser la dimension de ce sous-espace affine.

Exercice 20. Soit E un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$, on note $F = \{P \in E, P'(0) = 1\}$.

1. Montrer que F est un sous-espace affine de E.
2. On suppose que $E = \mathbb{R}_5[X]$. Déterminer la nature de F ainsi qu'une base de sa direction.
3. On suppose ici que $E = \mathbb{R}[X]$. Montrer que F est un hyperplan affine.

4. Exercices théoriques

Exercice 21. ($\star$) Soit E un espace affine.

1. Soit F une partie non vide de E. Montrer que F est un sous-espace affine de E si et seulement si toute droite passant par deux points distincts de F est contenue dans F.
2. Décrire le sous-espace affine engendré par deux droites affines non coplanaires dans un espace affine.
3. Soient F_1 et F_2 deux sous-espaces affines de E. Montrer que $F_1 \cup F_2$ est un sous-espace affine de E si et seulement si $F_1 \subset F_2$ ou $F_2 \subset F_1$.

Exercice 22. ($\star$) On considère deux sous-espaces affines V et W d'un espace affine E et on note T le sous-espace affine engendré par $V \cup W$.

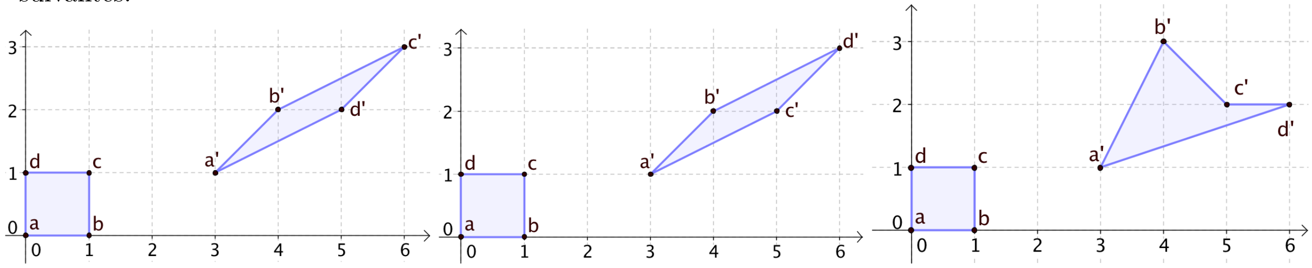
1. Pour tout $a \in V$ et tout $b \in W$, montrer qu'on a $\overrightarrow{T} = \overrightarrow{V} + \overrightarrow{W} + \mathrm{Vect}(\overrightarrow{ab})$.
2. Pour tout $a \in V$ et tout $b \in W$, montrer que V rencontre W si et seulement si le vecteur $\overrightarrow{ab}$ est dans $\overrightarrow{V} + \overrightarrow{W}$.
3. En déduire que $\dim(T) = \dim(()\overrightarrow{V} + \overrightarrow{W}) + 1$ si V ne rencontre pas W, et que $\dim(T) = \dim(()\overrightarrow{V} + \overrightarrow{W})$ sinon.

5. Transformations affines-Définitions

Exercice 23. Dans $\mathbb{R}^2$, on note $a = (0,0)$, $b = (1,0)$, $c = (1,1)$ et $d = (0,1)$. Représenter l'image de $abcd$ par les applications affines suivantes :

1. l'application g telle que $g(a) = c$ et $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est la matrice de $\overrightarrow{g}$ dans la base canonique ;
2. l'application h telle que $h(a) = d$ et $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est la matrice de $\overrightarrow{h}$ dans la base canonique.
3. h et g sont-elles égales ? Donner une application affine envoyant $g(a), g(b), g(c)$ sur $h(a), h(b), h(c)$. Ecrire la matrice de son application linéaire associée. Que constate-t-on ?

Exercice 24. Soit f une application affine qui envoie $abcd$ sur $a'b'c'd'$, comme indiqué sur l'une des figures suivantes.



1. Justifier que f ne définit une application affine que dans un seul des cas représentés. Montrer qu'elle est alors unique.
2. f est-elle bijective ?
3. Donner la matrice de l'application linéaire associée dans la base $(\overrightarrow{ab}, \overrightarrow{ad})$ puis dans la base $(\overrightarrow{ab}, \overrightarrow{ac})$. En déduire l'expression matricielle de f dans le répère (a, b, c).

Exercice 25. Déterminer toutes les applications affines d'un espace affine de dimension 1.

6. Translations-Homothéties

Exercice 26. Démontrer qu'une application affine qui commute avec toutes les translations est elle-même une translation.

Exercice 27. On définit quatre points $a = (1, 1)$, $a' = (-2, 2)$, $b = (1, 3)$ et $b' = (-2, 1)$. Montrer qu'il existe une homothétie h transformant a en a' et b en b'. Préciser son centre et son rapport.

Exercice 28. Soit f une transformation affine du plan. Soient a, b et c trois points non alignés. On note a', b' et c' les images respectives de a, b et c par f. On suppose que $(a'b')$ est parallèle à (ab), $(a'c')$ à (ac) et $(b'c')$ à (bc). Montrer que f est une homothétie ou une translation.

Exercice 29. ($\star$) *Theorème de Desargues.* Soient deux triangles non aplatis abc et $a'b'c'$ sans sommets communs. On suppose que (ab) est parallèle à $(a'b')$, que (bc) est parallèle à $(b'c')$ et que (ac) est parallèle à $(a'c')$. Montrer que les droites (aa'), (bb') et (cc') sont concourantes ou parallèles.

Exercice 30. Soit E un espace affine, a et b deux points (non nécessairement distincts) de E et λ, μ deux réels non nuls et différents de 1. On note h l'homothétie de centre a et de rapport λ et h' celle de centre b et de rapport μ.

1. On suppose $\lambda\mu = 1$. Déterminer la nature de $h' \circ h$ et $h \circ h'$.
2. On suppose $\lambda = 1/3$ et $\mu = 2$. Déterminer $h' \circ h$ et $h \circ h'$.

Exercice 31. Montrer que 2 homothéties commutent si et seulement si elles ont le même centre.