**Feuille d'exercices 1 : Matrices, bases et applications linéaires.**

## Applications linéaires

**Exercice 1.** Existe-t-il une application linéaire entre $K$-espaces vectoriels, avec $K = \mathbb{R}$, telle que
(a) l'image d'une droite vectorielle soit une demi-droite (ouverte/fermée) ?
(b) l'image d'un plan vectoriel soit un plan vectoriel privé de l'origine ?
(c) l'image d'un plan vectoriel privé de l'origine soit une droite vectorielle ?
(d) (*) que pouvez-vous dire de (b) et (c) pour $K$ un corps quelconque ?

**Exercice 2.** Pour les familles de vecteurs $\mathcal{F} = (e_1, e_2, \dots e_n)$ et $\mathcal{F}' = (e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$ suivantes, existe-t-il une application linéaire permettant de passer de $\mathcal{F}$ à $\mathcal{F}'$ ? Si oui est-elle unique ?
(a) Les vecteurs de $\mathbb{R}^2$ : $e_1 = (1,0), e_2 = (3,2), e_3 = (1,-2)$
et les vecteurs de $\mathbb{R}^2$ : $e'_1 = (0,1), e'_2 = (0,-2), e'_3 = (-2,4)$ (dessiner les vecteurs dans ce cas) ;

(b) Les vecteurs de $\mathbb{C}^3$ : $e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)$
et les vecteurs de $\mathbb{C}^3$ : $e'_1 = (0,0,0), e'_2 = (0,0,1), e'_3 = (1,0,0)$ ;

(c) Les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ : $e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1), e_4 = (1,1,1)$
et les vecteurs de $\mathbb{R}_3[X]$ : $e'_1 = X^3, e'_2 = X^2, e'_3 = X, e'_4 = 1$ ;

(d) Les vecteurs de $\mathbb{R}_4[X]$ : $e_1 = 1 + X^4, e_2 = X^2$
et les vecteurs de $\mathbb{R}^2$ $e'_1 = (2,-1), e'_2 = (3,0)$ ;

(e) Les vecteurs de $\mathbb{R}_3[X]$ : $e_1 = 2X+1, e_2 = X^3+X^2+X, e_2 = 2X^3+2X^2+1$
et les vecteurs de $\mathbb{R}_2[X]$ : $e'_1 = 1+X, e'_2 = 2+2X, e'_3 = 3+3X$ ;

(f) Les vecteurs de $\mathbb{C}_4[X]$, $e_1 = (1,1,1,0), e_2 = (0,i,i,i), e_3 = (-1,1,1,2)$
et les matrices de $M_2(\mathbb{C})$ $e'_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $e'_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $e'_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ i & 1 \end{pmatrix}$.

**Exercice 3.** Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application définie par $f(e_1) = e'_1$ et $f(e_2) = e'_2$. Dans chacun des cas suivants, déterminer graphiquement l'image des vecteurs $v_i$, donner la matrice de $f$ dans la base canonique, puis l'expression de $f(x,y)$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Identifier la transformation du plan définie par $f$.
(a) pour $e_1 = (1,0)$, $e_2 = (0,1)$, $e'_1 = (1,1)$, $e'_2 = (-1,1)$ et $v_1 = (2,0)$, $v_2 = (2,1)$ ;
(b) pour $e_1 = (1,1)$, $e_2 = (0,1)$, $e'_1 = (4,1)$, $e'_2 = (3,1)$ et $v_1 = (1,0)$, $v_2 = (2,-1)$ ;
(c) pour $e_1 = (3,3)$, $e_2 = (0,-3)$, $e'_1 = (1,2)$, $e'_2 = (-2,-4)$ et $v_1 = (1,2)$, $v_2 = (2,1)$.

**Exercice 4.** On considère les applications linéaires $f_i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définies pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ par

$$f_1(x,y) = (y,x), \quad f_2(x,y) = \left(\frac{2x+y}{4}, \frac{2x+y}{2}\right), \quad f_3(x,y) = \left(\frac{x-\sqrt{3}y}{2}, \frac{\sqrt{3}x+y}{2}\right).$$

(a) Représenter l'image de la base canonique pour chacune de ces applications. Préciser leur nature.
(b) Donner les matrices associées à ces applications. Ces matrices sont-elles équivalentes ?

**Exercice 5.** Si $A$ est la matrice associée à une application linéaire $f$ dans une base quelconque, montrer que le rang de $f$ est la dimension de l'espace engendré par les colonnes de $A$.

**Exercice 6.** Quelles sont les classes d'équivalences des matrices de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ ?

**Exercice 7.** Parmi les matrices suivantes, lesquelles sont équivalentes ?

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$, $F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $G = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$,

$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $J = \begin{pmatrix} i & -1 \\ -i & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $K = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ i & -1 & 0 \\ -1 & -i & 0 \end{pmatrix}$, $O = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 9 & 4 \\ 2 & 6 & 0 & 5 \\ 3 & 7 & 0 & 6 \\ 4 & 8 & 0 & 7 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -5 & 4 \\ 2 & 6 & -6 & 4 \\ 3 & 7 & -7 & 4 \\ 4 & 8 & -8 & 4 \end{pmatrix}$.

**Bases et espaces vectoriels**

**Exercice 8.** Les familles de fonctions suivantes sont-elles libres ?
(a) $\{\mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \exp(kx)\}_{k=1,\dots n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ ;
(b) $\{\mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^k\}_{k=0,\dots n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ ;

**Exercice 9.** On considère l'ensemble $M_2(\mathbb{C})$ des matrices $2 \times 2$ à coefficients dans $\mathbb{C}$.
(a) Rappelez pourquoi $M_2(\mathbb{C})$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel. Quelle est sa dimension ?
(b) Montrer que $M_2(\mathbb{C})$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Quelle est sa dimension ?
(c) Réciproquement, est-ce que $M_2(\mathbb{R})$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel ?

**Exercice 10.** (a) Pour $x, y, z \in \mathbb{R}$ calculer le déterminant $\begin{vmatrix} 1 & 2 & x \\ 2 & 3 & y \\ 3 & 4 & z \end{vmatrix}$.
(b) En déduire une équation cartésienne du sous-espace vectoriel $H$ de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs de coordonnées $(1, 2, 3)$ et $(2, 3, 4)$.
(c) Montrer que $H$ est le noyau d'une forme linéaire $f \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ et donner sa matrice dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}$.

**Exercice 11.** ($\star$) Soit $\{v_1, v_2, \dots v_{n-1}\}$ une famille libre de vecteurs d'un espace vectoriel $E$ de dimension $n$. Montrer qu'un vecteur $u$ de $E$ appartient au sous-espace vectoriel engendré par ces vecteurs si et seulement si $\det(v_1, v_2, \dots v_{n-1}, u) = 0$.

**Exercice 12.** Soit $E$ un espace vectoriel de dimension $n$. On désigne par $E^* = L(E, \mathbb{R})$ l'ensemble des formes linéaires sur $E$. Remarquer que $E^*$ est un espace vectoriel, préciser sa dimension et donner une base.

**Exercice 13.** ($\star$) Montrer qu'un sous-espace vectoriel est un hyperplan si et seulement si il est le noyau d'une forme linéaire non nulle.

**Algèbre**

**Exercice 14.** Montrer que la relation "*A est équivalente à B*" est une relation d'équivalence sur l'ensemble des matrices $M_{n,p}(\mathbb{R})$

**Exercice 15.**
(a) Montrer qu'une matrice de $M_n(\mathbb{R})$ est une matrice de passage si et seulement si elle est inversible.
(b) Montrer que $GL_n(\mathbb{R})$ est un groupe multiplicatif. Est-il commutatif ?

**Exercice 16.** ($\star$) L'ensemble $M_{n,p}(\mathbb{R})$ est-il un groupe multiplicatif ?

**Exercice 17.** ($\star$)
(a) Montrer que la famille de matrices de $M_2(\mathbb{C})$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$, $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $K = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$ est libre.
(b) Montrer que le sous-espace vectoriel engendré par cette famille forme une algèbre.
(c) Montrer qu'il forme un corps.

**Exercice 18.** Soit $P \in K[X]$ un polynôme sur un corps $K$ et $\lambda \in K$. Montrer que $P(\lambda) = 0$ si et seulement si $(X - \lambda)$ divise le polynôme $P$.