

Séries de Fourier : Exercices

Les exercices ci-dessous sont principalement adaptés de :

D : *Mathématiques pour l'agrégation interne. Analyse et probabilités.* Dantzer.

FGN2 : *Exercices de mathématiques des oraux de l'École Polytechnique et des Ecoles Normales Supérieures. Analyse 2.* Francinou, Gianella, Nicolas.

FGN4 : *Exercices de mathématiques des oraux de l'École Polytechnique et des Ecoles Normales Supérieures. Analyse 3.* Francinou, Gianella, Nicolas.

G : *Analyse.* Gourdon.

MVT : *Suites et séries de fonctions.* Moisan, Vernotte, Tosel.

QZ : *Analyse pour l'agrégation.* Queffélec, Zuily.

RW : *Mathématiques Tout-en-un pour la Licence.* Ramis, Warusfel.

La dernière application, plus probabiliste, est absente de ces manuels.

Cette liste est une liste non exhaustive de développements possibles pour l'agrégation.

Fonction ζ

En utilisant l'inégalité de Parseval avec des fonctions bien choisies, on peut expliciter les valeurs de quelques sommes infinies, en particulier les valeurs de la fonction ζ aux entiers pairs. Cela demande un peu de pratique en termes de calcul d'intégrales trigonométriques. Une méthode plus sophistiquée, impliquant les nombres de Bernoulli, permet de calculer $\zeta(2k)$ pour tout $k \geq 1$. Voir par exemple la discussion suivant [FGN2, Exercice 4.18], ou [D, Exercice 21.1] pour une version sans séries entières mais avec des polynômes de Bernoulli.

Exercice 1. [G, Exercice 1 p. 261] [MVT, Exercice A-1, pp. 155–156]

Soit f la fonction 2π -périodique telle que

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\pi-x}{2} & \forall x \in (0, 2\pi), \\ f(0) = 0 \end{cases}.$$

Donnez la série de Fourier de f . Déduisez-en la somme $\zeta(2) := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

Exercice 2. [MVT, Exercice A-2, p. 156]

Soit f la fonction 2π -périodique telle que $f(x) = |x|$ sur $[-\pi, \pi]$.

Donnez la série de Fourier de f . Déduisez-en les sommes $\zeta(4) := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}$.

Exercice 3. [MVT, Exercice A-3, p. 156]

Soit f la fonction impaire 2π -périodique telle que¹ $f(x) = x(\pi - x)$ sur $[0, \pi]$.

Donnez la série de Fourier de f . Déduisez-en les sommes $\zeta(6) := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^6}$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^6}$.

Exercice 4. [FGN2, Exercice 4.18] [G, Sujet d'étude 2 p. 299]

Soit $z \in \mathbb{C} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$. Soit φ la fonction 2π -périodique telle que $\varphi(x) = e^{\frac{zx}{2\pi}}$ pour tout $x \in (-\pi, \pi]$.

Déterminez le développement en série de Fourier de φ . Déduisez-en le développement en série entière en 0 de $f : z \mapsto \frac{z}{e^z - 1}$.

1. Pour calculer $\zeta(2k)$, il faut une fonction dont les coefficients de Fourier décroissent en $1/n^k$. À cause du lien entre régularité d'une fonction et décroissance de la série de Fourier, il faut utiliser des fonctions qui ne sont pas de classe C^{k-1} , C^k par morceaux. Les fonctions polynomiales par morceaux étant toujours C^k par morceaux, il faut donc utiliser des fonctions qui sont polynomiales par morceaux mais pas de classe C^{k-1} . Par exemple, des fonctions non continues pour calculer $\zeta(2)$, continues mais non C^1 pour calculer $\zeta(4)$, C^1 mais pas C^2 pour calculer $\zeta(6)$...

Développements eulériens

Exercice 5. [FGN2, Exercice 4.9] [G, Exercice 2 p. 262] [MVT, Exercice A-4 pp. 156–157]

Soit $u \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$. Soit f_u la fonction 2π -périodique telle que $f(x) = \cos(ux)$ pour tout $x \in [-\pi, \pi)$.

1. Calculez les coefficients de Fourier de f_u .
2. Déduisez-en que, pour tout $u \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$,

$$\pi \cotan(\pi u) - \frac{1}{u} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2u}{u^2 - n^2} =: g(u).$$

3. Application : calculez $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.
4. Pour tout $x \in (0, 1)$, calculez de deux façons $I(x) := \int_0^x g(u) du$.
5. Déduisez-en le produit eulérien

$$\frac{\sin(\pi x)}{\pi x} = \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right).$$

Équation de la chaleur

Exercice 6. [FGN4, Exercice 1.28] [MVT, Exercice D-2, pp. 168-169] [RW, Exercice 7, pp. 690-691]

Soit $u_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, \mathcal{C}^1 par morceaux et 2π -périodique. Montrez qu'il existe une unique solution $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ à l'équation de la chaleur sur le cercle

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \text{sur } \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \\ u(x, 0) &= u_0(x) & \text{pour tout } x \in \mathbb{R} \end{cases},$$

qui soit de plus continue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ et \mathcal{C}^∞ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$, et telle que $u(\cdot, t)$ soit 2π -périodique pour tout $t \geq 0$.

Inégalité de Wirtinger, inégalité isopérimétrique

Exercice 7. [FGN2, Exercice 4.20] [G, Exercice 3 p. 264] [MVT, Exercice D-3 p. 169]

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une application continue, \mathcal{C}^1 par morceaux et T -périodique. Supposons que

$$\int_0^T f(t) dt = 0.$$

Montrez l'inégalité de Wirtinger² :

$$\int_0^T |f(t)|^2 dt \leq \frac{T^2}{4\pi^2} \int_0^T |f'(t)|^2 dt.$$

Caractérissez le cas d'égalité.

Exercice 8. [FGN4, Exercice 4.11] [MVT, Exercice D-4 pp. 169-170] [QZ, Chapitre IV.VI.2] [RW, Exercice 8 p. 695]

2. Pour des applications de cette inégalité, voir [FGN2, Exercices 4.20 et 4.21]

Soit $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe fermée³ simple⁴ continue et \mathcal{C}^1 par morceaux. On notera $\gamma(t) = (x(t), y(t))$. Soit L sa longueur et S l'aire intérieure, de telle sorte que

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt,$$

$$S = \left| \int_0^{2\pi} x(t)y'(t) dt \right|.$$

1. Montrez que $L^2 = 2\pi \int_0^{2\pi} \|\gamma'(t)\|^2 dt$, et déduisez-en que :

$$L^2 - 4\pi S = 2\pi \left(\int_0^{2\pi} (x'(t)^2 - x(t)^2) dt + \int_0^{2\pi} (y'(t)^2 - y(t)^2) dt \right).$$

2. Utilisez l'inégalité de Wirtinger pour démontrer l'*inégalité isopérimétrique* $L^2 \geq 4\pi S$.

3. Montrez de plus que $L^2 = 4\pi S$ si et seulement si la courbe γ trace un cercle.

Phénomène de Gibbs

Exercice 9. [FGN2, Exercice 4.25] [G, Exercice 6 p. 266] [RW, Exercice 6 pp. 688-689]

Soit f la fonction 2π -périodique sur \mathbb{R} égale à l'identité sur $[0, 2\pi)$.

- Déterminez les coefficients de Fourier de f .
- Soit S_n la somme partielle d'indice $n \geq 1$ de sa série trigonométrique. Déterminez les extrema de S_n .
- Soit m_n le premier minimum de S_n sur $[0, 2\pi)$. Étudiez le comportement de la suite $(m_n)_{n \geq 1}$. Interprétez.

Critère d'équidistribution de Weyl

Exercice 10. [D, Exercice 21.2] [FGN2, Exercices 1.28 et 1.29] [G, Problème 21 p. 288] [RW, Théorème 29 p. 694]

Soit $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Pour tout réel x , on note $\{x\}$ la partie décimale de x .

1. Soit f une fonction continue, \mathcal{C}^1 par morceaux et 1-périodique. Posons, pour tout $n \geq 0$,

$$U_n(f) := \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(k\theta).$$

Montrez que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n(f) = \int_0^1 f(t) dt.$$

- Déduisez-en que l'ensemble $\{\{\theta n\} : n \geq 0\}$ est dense dans l'intervalle $[0, 1]$.
- Déduisez-en de plus que, pour tous $0 \leq a \leq b \leq 1$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\text{Card} \{0 \leq k < n : \{\theta k\} \in [a, b]\}}{n} = b - a.$$

3. C'est-à-dire que $\gamma(1) = \gamma(0)$

4. C'est-à-dire injective sur $[0, 1)$

Formule sommatoire de Poisson

Exercice 11. [FGN2, Exercices 4.16 et 4.17] [G, Problème 4 pp. 272-273]

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction \mathcal{C}^1 telle que $f(x) = O(1/x^2)$ et $f'(x) = O(1/x^2)$ en $\pm\infty$. On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\varphi(x) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x + 2\pi n).$$

1. Montrez que φ est de classe \mathcal{C}^1 et 2π -périodique.
2. Calculez les coefficients de Fourier $\hat{\varphi}(n) := c_n(\varphi)$ de φ en fonction des coefficients de Fourier $\hat{f}(n) := c_n(f)$ de f .
3. Déduisez-en que

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(2\pi n) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n).$$

4. Montrez que⁵, pour tout $\alpha > 0$,

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\alpha n^2} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\frac{\pi^2 n^2}{\alpha}}.$$

Marches aléatoires et intégrales de Wallis

Exercice 12. Soit $(X_n)_{n \geq 0}$ une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées de loi de Rademacher ($\mathbb{P}(X_0 = -1) = \mathbb{P}(X_0 = 1) = 1/2$). Posons $S_n := \sum_{k=0}^{n-1} X_k$; le processus $(S_n)_{n \geq 0}$ est une marche aléatoire issue de 0. On notera enfin p_n la loi de S_n .

1. Justifiez que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \geq 0$,

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} p_n(k) e^{ikx} = \mathbb{E}(e^{ixS_n}) = \cos(x)^n.$$

2. Déduisez-en que⁶

$$\mathbb{P}(S_n = 0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(x)^n dx.$$

3. Grâce à un argument combinatoire, montrez que

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(x)^n dx = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est impair} \\ \frac{1}{2^n} \binom{n}{n/2} & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases}.$$

5. Cette dernière question nécessite de connaître la transformée de Fourier d'une fonction gaussienne.

6. Ici, la fonction $x \mapsto \cos(x)^n$ est un polynôme trigonométrique, ce qui rend les arguments élémentaires. Si on avait choisi une loi plus compliquée pour X , il aurait fallu utiliser des arguments plus compliqués pour justifier cette question.