Séries de Fourier. Notes de cours.

Attention : Il y a trois leçons portant explicitement sur les séries et transformées de Fourier :
- ▷ **212** : Série de Fourier d'une fonction périodique ; propriétés de la somme. Exemples.
- ▷ **414** : Exemples de séries de Fourier et de leurs applications.
- ▷ **451** : Exemples d'applications des transformées de Fourier et de Laplace.

Les transformées de Fourier et de Laplace ne seront pas traitées ici ; certaines de leurs propriétés sont évoquées dans le polycopié sur les intégrales à paramètres. Les exercices joints à cette leçon pourront être utilisés pour la leçon **414**.

Connaissances préalables et notations :
- ▷ Espaces préhilbertiens sur les corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
- ▷ Projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel de dimension finie.
- ▷ Théorème de Stone-Weierstrass trigonométrique.

Références

Pour le contenu du cours : beaucoup de livres ont une présentation trop superficielle au niveau exigé pour l'agrégation, ou bien trop technique. Je conseille :
- ▷ **[RW] :** ***Mathématiques Tout-en-un pour la Licence.*** **Ramis, Warusfel** est une excellente référence sur le sujet, et celle que je conseille en premier lieu. Ce livre est disponible en version numérique aux oraux de l'agrégation.
- ▷ **[D] :** ***Mathématiques pour l'agrégation interne. Analyse et probabilités.*** **Dantzer** est aussi une excellente référence sur le sujet.
- ▷ **[QZ] :** ***Analyse pour l'agrégation.*** **Queffélec, Zuily** est lui aussi très correct.

Remarquons que, si l'article sur les séries de Fourier de Wikipedia manque d'énoncés mathématiques précis et adaptés, il est un très bon texte d'introduction.

Pour les développements, on regardera en particulier :
- ▷ **[FGN2] :** ***Exercices de mathématiques des oraux de l'Ecole Polytechnique et des Ecoles Normales Supérieures. Analyse 2.*** **Francinou, Gianella, Nicolas.** Beaucoup d'exercices techniques n'ont pour but que de tester les compétences techniques des candidats. Ceci dit, ce livre contient quelques perles, qui ont l'avantage d'énoncés courts et de corrections rigoureuses. Excellent pour qui cherche des exercices précis.
- ▷ **[MVT] :** ***Suites et séries de fonctions.*** **Moisan, Vernotte, Tosel**. On y trouve beaucoup de développements intéressants, que l'on peut presque choisir à l'aveugle.

D'autres références peuvent aussi être très utiles. Des développements possibles et les références associées sont détaillés dans la feuille d'exercices jointe.

Motivation : l'équation de la chaleur

0.1 Un peu d'histoire des mathématiques

Jean-Baptiste Joseph Fourier est né en 1768 ; à l'occasion du 250ème anniversaire de sa naissance, il y a eu plusieurs publications à vocation historique. Nous renvoyons le lecteur intéressé vers, par exemple *Fourier, un homme, plusieurs vie.* Bernard Maurey, Gazette de la Société Mathématique de France [1], n°158, Octobre 2018.

L'idée de travailler avec des séries trigonométriques pour résoudre des problèmes physique prédate Fourier d'une cinquantaine d'années ; on la retrouve déjà dans des travaux de Bernoulli, d'Alembert,

1. Ex-Gazette des mathématiciens.

Euler, Lagrange. La motivation était plutôt issue de la musique et des équations d'ondes. Cette idée a cependant été systématisée par Fourier, qui introduit l'idée que toute fonction peut être décomposée en série trigonométrique, avec pour motivation l'étude de l'**équation de la chaleur**.

0.2 Autour de l'équation de la chaleur

Considérons, pour simplifier, une barre métallique de longueur L. La température u de la barre dépend essentiellement seulement d'une variable de position $x \in [0, L]$, et du temps. Pour simplifier, on supposera que les échanges de chaleurs ne se font qu'à l'intérieur de la barre métallique.

0.2.1 Vers l'équation de la chaleur

Pour comprendre l'évolution de la température, on va chercher une équation d'évolution satisfaite par la fonction u. D'une part, en première approximation, le flux de chaleur $\vec{J}$ est proportionnel au gradient de la température :

$$\vec{J}(x,t) = -\lambda \vec{\nabla} u(x,t),$$

où λ est la **conductivité thermique** du matériau. En une dimension, on a plus simplement

$$J(x,t) = -\lambda \frac{\partial u}{\partial x}(x,t). \tag{1}$$

C'est la **loi de Fourier**.

D'autre part, le métal chauffe en un point si le flux entrant est plus élevé que le flux sortant. D'un point de vue infinitésimal,

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = -\frac{1}{C} \operatorname{div}(\vec{J}),$$

où C est la **capacité thermique volumique** du matériau. En une dimension, on a plus simplement

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = -\frac{1}{C} \frac{\partial J}{\partial x}(x,t). \tag{2}$$

En combinant les Équations (1) et (2), on trouve

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \frac{\lambda}{C} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t).$$

Les mathématiciens aiment en général avoir le moins de constantes possibles. En choisissant bien les unités de temps et d'espace, on peu s'assurer que $L = \pi$ et que l'équation de la chaleur est sans dimension :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t). \tag{3}$$

Remarque : En dimension n, on obtient plus généralement l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \frac{\lambda}{C} \operatorname{div}(\vec{\nabla} u)(x,t) = \frac{\lambda}{C} \Delta u(x,t),$$

où Δ est l'opérateur de Laplace :

$$\Delta u(x,t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x,t).$$

0.2.2 Conditions au bord

L'équation de la chaleur (3) ne suffit pas à décrire la solution u. Il faut d'un part une **condition initiale**, c'est-à-dire le profil de température au temps initial $u(x,0) =: u_0(x)$, et d'autre part des **conditions au bord**, qui décrivent les interactions du système avec l'extérieur au cours du temps. Il y a trois grands types de conditions au bord.

Le premier type est l'utilisation de **conditions au bord périodiques** : $u(\cdot,t)$ s'étend en une fonction $\mathcal{C}^2$ et L-périodique pour tout t. Dans ce cas, on prendra $L = 2\pi$ au lieu de $L = \pi$. On peut alors prolonger $u(\cdot,t)$ en une fonction 2π-périodique sur $\mathbb{R}$, qui satisfait toujours l'équation de la chaleur (3). Physiquement, cela revient à "refermer la barre sur elle-même" pour obtenir un cercle.

Le second type est l'utilisation de **conditions au bord de Dirichlet** : $u(L,t) = u(0,t) = 0$ pour tout t. Physiquement, cela revient à mettre un thermostat à température 0 à chaque extrémité de la barre. On peut se ramener aux conditions au bord périodiques en deux étapes :

- ▷ On étend u antisymétriquement à l'intervalle $[0,2\pi]$ en posant $u(-x,t) = -u(x,t)$. L'antisymétrie fait que le prolongement est $\mathcal{C}^1$; de plus, comme $\frac{\partial u}{\partial t}(0,t) = 0 = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0,t)$, de prolongement est en fait $\mathcal{C}^2$.
- ▷ On étend ensuite u à $\mathbb{R}$ par 2π-périodicité.

La fonction $u(\cdot,t)$ est alors impaire pour tout t.

Le troisième type est l'utilisation de **conditions au bord de von Neumann** : $\frac{\partial u}{\partial x}(L,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0$ pour tout t. Physiquement, cela revient à isoler les extrémités de la barre, et à laisser la température s'homogénéiser sans interaction avec l'extérieur. On peut se ramener aux conditions au bord périodiques en deux étapes :

- ▷ On étend u symétriquement à l'intervalle $[0,2\pi]$ en posant $u(-x,t) = u(x,t)$. Les conditions au bord de von Neumann assurent que ce prolongement est $\mathcal{C}^1$, et la symétrie qu'il est en fait $\mathcal{C}^2$.
- ▷ On étend ensuite u à $\mathbb{R}$ par 2π-périodicité.

La fonction $u(\cdot,t)$ est alors paire pour tout t.

L'intérêt des conditions au bord périodiques est qu'elles recouvrent les trois scénarii ci-dessus, et que l'évolution est ensuite entièrement déterminée par la donnée de u_0 et de l'équation de la chaleur (3). **On se placera dans le cadre de conditions au bord périodiques pour le reste de cette leçon.**

0.2.3 Une résolution simplifiée

Suivant la condition initiale, la solution à l'équation de la chaleur peut être extrêmement simple. Par exemple, si $u_0(x) = \sin(2\pi nx)$ pour un entier $n \geq 1$, on peut chercher une solution de la forme $u(x,t) = u_0(x)f(t)$. L'équation de la chaleur fournit une équation différentielle ordinaire sur f :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = u_0(x)f'(t), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = u_0''(x)f(t) = -n^2 u_0(x)f(t).$$

Si f est solution de l'équation différentielle $y' = -n^2 y$ avec condition initale $y(0) = 1$ alors u est solution de l'équation de la chaleur. Cela donne donc une famille dénombrable de solutions :

$$u(x,t) = \sin(2\pi nx)e^{-n^2 t}, \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

On peut faire de même avec $u_0(x) = \cos(2\pi nx)$, et $n \geq 0$. On obtient une deuxième famille de solutions :

$$u(x,t) = \cos(2\pi nx)e^{-n^2 t}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Si l'on accepte de travailler avec des nombres complexes, ces deux familles de solutions sont équivalentes à la famille

$$(x,t) \mapsto e^{inx}e^{-n^2 t}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

L'équation de la chaleur étant linéaire, les combinaisons linéaires de solutions sont des solutions. Par conséquent, si u_0 est un polynôme trigonométrique 2π-périodique :

$$u_0(x) = \sum_{k=-N}^{N} a_k e^{2\pi ikx},$$

alors on peut calculer explicitement la fonction température en tout temps :

$$u(x,t) = \sum_{k=-N}^{N} a_k e^{2\pi ikx} e^{-k^2 t}.$$

La motivation pour définir les séries de Fourier est la suivante. Si l'on se donne une condition initiale $\mathcal{C}^2$ quelconque [2], et que l'on arrive à écrire u comme somme d'exponentielles complexes :

$$u_0(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{2\pi ikx}, \tag{4}$$

alors on dispose d'un bon candidat pour u :

$$u(x,t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{2\pi ikx} e^{-k^2 t}.$$

Bien entendu, cela pose plusieurs difficultés : la possibilité de décomposer u_0 en une telle somme infinie, déterminer les coefficients a_k, le sens en lequel la somme converge, et la vérification ensuite que u est bien solution de l'équation de la chaleur.

0.3 Coefficients de Fourier

Les coefficients de Fourier peuvent formellement se calculer de la façon suivante. Soit u_0 une fonction continue par morceaux 2π-périodique. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Posons

$$a_n(u_0) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u_0(x) e^{-2\pi inx} \, \mathrm{d}x.$$

Alors, si l'on dispose d'une décomposition telle que donnée par l'Équation (4), formellement,

$$\begin{aligned}
a_n(u_0) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{2\pi ikx} e^{-2\pi inx} \, \mathrm{d}x \\
&= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{2\pi i(k-n)x} \, \mathrm{d}x \\
&= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \delta_{n,k} \\
&= a_n,
\end{aligned}$$

où $\delta_{n,k}$ est le symbole de Kronecker, qui vaut 1 si $n = k$ et 0 sinon. L'intégrale $a_n(u_0)$ fournit bien le coefficient souhaité. Là encore, ce calcul est rigoureux si u_0 est un polynôme trigonométrique, et demande à être justifié sinon.

2. L'hypothèse de régularité sur u_0 peut être (beaucoup) affaiblie, mais cela demande de préciser le sens de l'équation, et apportera peu dans le cadre de ce cours.

0.4 Un point de vue plus algébrique

Considérons une équation différentielle ordinaire $y' = Ay$ avec condition initiale $y(0) = y_0$, où y est à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ et A est une matrice diagonalisable (sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). On peut déterminer ces solutions explicitement par la méthode suivante :

- ▷ On détermine une base de vecteurs propres $(v_1, \ldots, v_n)$ de A, les valeurs propres associées étant $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$
- ▷ On détermine les coordonnées de y_0 dans cette base : $y_0 = \sum_{k=1}^n a_k v_k$.
- ▷ La solution de l'équation différentielle est alors

$$y(t) = \sum_{k=1}^{n} a_k e^{\lambda_k t} v_k.$$

Ici, on peut voir l'équation de la chaleur (3) comme une équation de la forme $y' = Ay$, où $A = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ est linéaire, et $y(0) = u_0$. Les fonctions trigonométriques $e_n : x \mapsto e^{2\pi i n x}$ sont des vecteurs propres pour cet opérateur :

$$Ae_n = -n^2 e_n.$$

La logique précédente est donc la même : on décompose la condition initiale u_0 dans une base de vecteurs propres pour l'application linéaire $A = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$, on résoud l'équation pour chaque vecteur propre, et enfin on reconstruit la solution voulue.

Il reste une chose à expliquer : la formule explicite des coefficients $a_n(u_0)$. Rappelons que, si A est une matrice réelle symétrique ($A^T = A$ et A est réelle), ou plus généralement une matrice hermitienne ($A^T = \overline{A}$), alors les valeurs propres de A sont réelles, et A est diagonalisable dans une base orthonormée.

La notion de matrice symétrique (ou hermitienne) peut s'exprimer sans coordonnées. Soit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$. Alors A est symétrique si et seulement si, pour tous x, $y \in \mathbb{R}^n$,

$$\langle x, Ay \rangle = \langle Ax, y \rangle.$$

On dit aussi que l'application linéaire associée à A est **autoadjointe** ; une applicaiton linéaire autoadjointe est à valeurs propres réelles et diagonalisable dans une base orthonormée $(v_1, \ldots, v_n)$. De plus, dans une base orthonormée, les vecteurs se décomposent dans la base propre grâce ax projecteurs spectraux :

$$y_0 = \sum_{k=1}^{n} \langle v_k, y_0 \rangle v_k.$$

Donc, si A est autoadjointe, la solution de l'équation diférentielle $y' = Ay$ avec condition initiale y_0 est :

$$y(t) = \sum_{k=1}^{n} \langle v_k, y_0 \rangle e^{\lambda_k t} v_k.$$

La forme bilinéaire

$$(f, g) \mapsto \langle f, g \rangle := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \overline{f}(t) g(t) \, \mathrm{d}t$$

est un produit hermitien sur l'espace des fonctions $\mathcal{C}^2$ et 2π-périodiques sur $\mathbb{R}$. L'opérateur $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$

agissant sur cet espace est autoadjoint : pour toutes fonctions f, $g \in \mathcal{C}^2$ qui sont 2π-périodiques,

$$\begin{aligned}
\langle f, g'' \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \overline{f}(t) g''(t) \,\mathrm{d}t \\
&= \left[\overline{f}(t) g'(t)\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \overline{f}'(t) g'(t) \,\mathrm{d}t \\
&= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \overline{f}'(t) g'(t) \,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \overline{f}''(t) g(t) \,\mathrm{d}t \\
&= \langle f'', g \rangle.
\end{aligned}$$

Par conséquent, on peut espérer, comme en dimension finie, disposer d'une base $(v_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ orthonormée, de telle sorte qu'un vecteur se décompose dans cette base à l'aide des projecteurs spectraux

$$a_n(u_0) = \langle v_n, u_0 \rangle.$$

Pour cet opérateur spécifique, la base orthonormée est fournie par les monômes trigonométriques $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$.

0.5 Plan du cours

Rappelons que la logique générale consiste, étant donnée une fonction u_0, à dans un premier temps déterminer ses coefficients de Fourier $a_n(u_0)$, puis à écrire la fonction comme combinaison linéaire de monômes trigonométriques $u_0 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k(u_0) e_k$.

Dans la suite de ce cours :

- ▷ Nous allons expliciter un cadre rigoureux dans lequel travailler, notamment les espaces de fonctions dans lesquels les différentes opérations seront définies.
- ▷ Ensuite, nous allons regarder la définition et les propriétés de la décomposition d'une fonction dans la base donnée par les monômes trigonométriques e_n.
- ▷ Enfin, nous allons étudier la reconstruction d'une fonction à partir de ses coefficients de Fourier, c'est-à-dire le sens auquel la série $\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k(u_0) e_k$ converge, et le cas échéant si elle coïncide bien avec u_0.

Un peu d'analyse fonctionnelle

0.6 Espaces de fonctions

On note $\mathcal{CM}_{2\pi}$ l'espace des fonctions 2π-périodiques continues par morceaux sur l'intervalle $[0, 2\pi]$. On note $\mathcal{D}_{2\pi} \subset \mathcal{CM}_{2\pi}$ l'ensemble des fonctions $f \in \mathcal{CM}_{2\pi}$ telles que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{1}{2} \left(\lim_{x^-} f + \lim_{x^+} f \right). \tag{5}$$

Remarque : Si f est continue et 2π-périodique, alors $f \in \mathcal{D}_{2\pi}$. Si $f \in \mathcal{CM}_{2\pi}$, alors il existe une unique fonction $g \in \mathcal{D}_{2\pi}$ qui ne diffère de f qu'en un nombre fini de points :

- ▷ g doit coïncider avec f à l'intérieur des intervalles de continuité de f ;
- ▷ il ne reste éventuellement qu'à chager la valeur de f en ses points de discontinuité ; les nouvelles valeurs sont alors définies par l'Équation (5), c'est-à-dire par les valeurs de f à l'intérieur des intervalles de continuité.

On dit qu'une fonction f est de classe $\mathcal{C}^k$ par morceaux sur un intervalle $[a, b]$ s'il existe une subdivision $a = \alpha_0 < \alpha_1 < \ldots < \alpha_n = b$ telle que, sur chaque intervalle (α_i, α_{i+1}), la fonction $f_{(\alpha_i, \alpha_{i+1})}$ soit restriction d'une fonction $g_i \in \mathcal{C}^k([\alpha_i, \alpha_{i+1}], \mathbb{C})$.

0.7 Espaces $\mathcal{D}_{2\pi}$ et intégrales

Soit I in intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$. Dans le cours d'intégration, nous avions vu que

- ▷ Si f est une fonction continue positive telle que $\int_I f(t)\,\mathrm{d}t = 0$, alors $f = 0$.
- ▷ Si f est une fonction continue par morceaux positive telle que $\int_I f(t)\,\mathrm{d}t = 0$, alors $f = 0$, sauf éventuellement en un nombre fini de points.

Cette dernière exception est gênante pour ce que nous allons faire. L'introduction de l'espace $\mathcal{D}_{2\pi}$ permet de donner une "forme normale" à chaque fonction continue par morceaux, qui est nulle partout si elle est nulle sur chaque intervalle de continuité. Par conséquent,

- ▷ Si $f \in \mathcal{D}_{2\pi}$ est positive et telle que $\int_I f(t)\,\mathrm{d}t = 0$, alors $f = 0$.

0.8 Structure hermitienne

On supposera connu :

- ▷ La notion de produit scalaire (voir Moisan, Analyse 3, p.84 ou Caby-Auliac).
- ▷ Les exemples classiques : $\ell^2(\mathbb{R}) = \{u : \mathbb{N} \to \mathbb{R} :\ \sum_{n\geq 0} u_n^2 < +\infty\}$ muni du produit scalaire $\langle u, v\rangle = \sum_{n\geq 0} u_n v_n$; ou encore $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ muni du produit scalaire $\langle f, g\rangle = \int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$;
- ▷ les inégalités de normes associées, en particulier l'inégalité de Cauchy-Schwarz $|\langle f, g\rangle| \leq \|f\|\,\|g\|$, et l'inégalité triangulaire $\|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|$ qui en découle ;
- ▷ le théorème de Pythagore : si les $(a_i)_{1\leq i\leq n}$ sont deux-à-deux orthogonaux,

$$\left\|\sum_{i=1}^n a_i\right\|^2 = \sum_{i=1}^n \|a_i\|^2 .$$

Un produit hermitien (ou forme hermitienne) est une des généralisations possible de la notion de produit scalaire aux espaces vectoriels complexes. Si l'on travaille avec des nombres complexes, on ne peut pas avoir à la fois la bilinéarité et la positivité ; la notion de produit hermitien affaiblit la bilinéarité pour préserver la positivité.

Définition : Soit E un espace vectoriel complexe. Un **produit scalaire hermitien** sur E est une application $\langle\cdot,\cdot\rangle : E \times E \to \mathbb{C}$ qui est :

- ▷ linéaire à droite : $\langle u, \lambda v + \mu w\rangle = \lambda\langle u, v\rangle + \mu\langle u, w\rangle$ pour tous u, v, $w \in E$ et λ, $\mu \in \mathbb{C}$.
- ▷ telle que $\langle v, u\rangle = \overline{\langle u, v\rangle}$ pour tous u, $v \in E$.
- ▷ antilinéaire à gauche : $\langle \lambda u + \mu v, w\rangle = \overline{\lambda}\langle u, w\rangle + \overline{\mu}\langle v, w\rangle$ pour tous u, v, $w \in E$ et λ, $\mu \in \mathbb{C}$ (cette propriété découle des deux précédentes).
- ▷ définie positive : $\langle u, u\rangle \geq 0$ pour tout $u \in E$, avec égalité si et seulement si $u = 0$.

On définit alors une norme $\|u\|^2 = \langle u, u\rangle$. Les propriétés des normes euclidiennes s'étendent à cette norme.

Par exemple, le produit scalaire hermitien canonique sur $\mathbb{C}^n$ est

$$\langle u, v\rangle = \sum_{i=1}^n \overline{u_i} v_i,$$

et la norme hermitienne associée est $\|u\|^2 = \sum_{i=1}^n |u_i|^2$.

Attention : La définition de forme hermitienne varie d'un texte à l'autre. Une autre convention courante est de demander que $\langle u, v\rangle$ soit linéaire à gauche et antilinéaire à droite, comme par exemple la forme $\sum_{i=1}^n u_i\overline{v_i}$. Faites attention à ces conventions afin de rester cohérent ; cependant, ce choix n'affecte pas significativement le reste de la théorie.

Exemple central : On définit une forme hermitienne sur $\mathcal{D}_{2\pi}$ par :

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overline{f(t)} g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Ce produit hermitien est bien défini positif : en particulier, si $\langle f, f \rangle = 0$, alors $|f|^2 = 0$ sur $[0, 2\pi]$, donc $f = 0$ sur $[0, 2\pi]$. Par 2π-périodicité, $f = 0$.

C'est là le principal avantage des espaces $\mathcal{D}_{2\pi}$. Si l'on avait travaillé avec $\mathcal{CM}_{2\pi}$, la forme hermitienne n'aurait pas été définie positive, ce qui nous aurait obligé à travailler avec un espace non hermitien ; c'est possible, mais introduirait beaucoup de petites subtilités dans les propriétés et leurs démonstrations. En pratique, nous démontrerons certaines propriétés pour des fonctions de $\mathcal{D}_{2\pi}$ puis, quand c'est possible, les étendrons aux fonctions de $\mathcal{CM}_{2\pi}$.

0.9 Projections orthogonales

Soient E un espace hermitien et F un sous-espace vectoriel de dimension finie n. Soit $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ une base orthonormée de F. Alors la projection orthogonale sur F est :

$$\pi_F : \left\{ \begin{array}{lcl} E & \to & F \\ v & \mapsto & \sum_{i=1}^n \langle e_i, v \rangle e_i \end{array} \right. .$$

On vérifie que π_F est à image dans F, vaut l'identité sur F et $\operatorname{Ker}(\pi_F) = F^{\perp}$.

Proposition : Soient E un espace hermitien et F un sous-espace vectoriel de dimension finie. Soit π_F le projeté orthogonal sur F. Alors :

- ▷ Pour tout vecteur $u \in E$, le vecteur $\pi_F(u)$ réalise le minimum $\min_{v \in F} \|u - v\|$.
- ▷ Pour tout vecteur $u \in E$, le vecteur $\pi_F(u)$ est orthogonal au vecteur $u - \pi_F(u)$. En particulier,

$$\|u\|^2 = \|\pi_F(u)\|^2 + \|u - \pi_F(u)\|^2 .$$

Attention : Il y a ici essentiellement le seul endroit où il faut faire attention à la définition du produit scalaire hermitien. Si ce produit est antilinéaire à gauche, alors $\pi_F = \sum_{i=1}^n \langle e_i, \cdot \rangle e_i$. Si ce produit est antilinéaire à droite, alors $\pi_F = \sum_{i=1}^n \langle \cdot, e_i \rangle e_i$. Dans tous les cas, le vecteur de base doit apparaître du côté antilinéaire de la forme hermitienne.

0.10 Une application : les polynômes de Legendre

On se place dans le cadre d'espaces vectoriels réels muni d'un produit scalaire. On choisit $E = \mathcal{C}([-1, 1], \mathbb{R})$ et $F = \mathbb{R}_1[X]$, vu comme espace de fonction polynômiales. L'espace E est muni du produit scalaire

$$\langle f, g \rangle := \int_{-1}^1 f(t)g(t) \, \mathrm{d}t.$$

Définition : Les polynômes de Legendre $(P_n)_{n \geq 0}$ constituent l'unique famille de polynômes réels tels que P_n est de degré n, $P_n(1) = 1$ pour tout n et (P_n) est orthogonale pour le produit scalaire ci-dessus.

Ainsi, (P_n) est une base orthogonale de $\mathbb{R}[X] \subset E$. À normalisation près, $(P_0, \ldots, P_n)$ peut s'obtenir en partant de la base $(1, \ldots, X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$ et en utilisant l'algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.

En particulier, $P_0(X) = 1$, $P_1(X) = X$ et $P_2(X) = \frac{3X^2-1}{2}$. Le calcul des termes suivants est laissé en exercice au lecteur.

Application : Algorithme de Gauss-Legendre [Oraux X-ENS, Analyse 3]. Soit $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Calculer l'intégrale de f, c'est calculer $2\langle P_0, f \rangle$. Si f est polynômiale de degré n, il suffit de décomposer f dans la base $(P_0, \ldots, P_n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$. Si l'on fait cela avec le produit scalaire, on n'est pas plus avancé : la définition de ce produit scalaire fait intervenir l'intégrale de f, que l'on cherche à calculer ! Cependant, on peut aussi procéder par interpolation : l'évaluation de f en un nombre fini de points (x_i) permet de récupérer les coordonnées $(a_0, \ldots, a_n)$ dans la base $(P_0, \ldots, P_n)$, et l'intégrale recherchée est $2a_0$. Finalement, on peut trouver une formule donnant l'intégrale de f comme combinaison linéaire de valeurs particulières de f.

Si f nest pas un polynôme, on peut utiliser la même formule pour approcher l'intégrale de f "à l'ordre n" ; cette fois-ci, il ne s'agira en général plus d'une égalité.

Par exemple, pour $n = 2$: soient $P(X) = aX^2 + bX + c$ un polynôme de degré 1 et (a_0, a_1, a_2) ses coordonnées dans la base (P_0, P_1, P_2). Alors :

$$P\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = a_1 \frac{1}{\sqrt{3}} + a_0, \quad P\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -a_1 \frac{1}{\sqrt{3}} + a_0, \quad P(0) = -\frac{a_2}{2} + a_0.$$

En particulier, $2a_0 = P\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + P\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ est égal à l'intégrale de P sur $[-1, 1]$. Si f n'est pas un polynôme de degré 2, la formule $f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ fournit une approximation "à l'ordre 2" de $\int_{-1}^{1} f(t)\, dt$. L'approximation "à l'ordre 1" est simplement $2f(0)$. L'approximation "à l'ordre 3" est laissée en exercice.

Exercice : Calculez

$$\min_{a,b \in \mathbb{R}^2} \int_{-1}^{1} \left(e^t - at - b\right)^2 \, \mathrm{d}t.$$

Résolution de l'exercice : Soit $F = \mathbb{R}_1[X]$. Le minimum est réalisé pour le projeté orthogonal de la fonction exponentielle sur F. Or $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}X)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}_1[X]$. Ce projeté est donc

$$x \mapsto \frac{1}{2}\langle 1, e^t \rangle 1 + \frac{3}{2}\langle t, e^t \rangle x,$$

et donc le minimum est réalisé pour les paramètres a et b suivants :

$$a = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} e^t \, \mathrm{d}t = \sinh(1),$$
$$b = \frac{3}{2} \int_{-1}^{1} te^t \, \mathrm{d}t = \frac{3}{e}.$$

Série de Fourier d'une fonction périodique

0.11 Définition des coefficients de Fourier

Définition : Soit $f \in \mathcal{CM}_{2\pi}$. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, le k-ième coefficient de Fourier (exponentiel) est le nombre complexe

$$c_k(f) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-ikt} \, \mathrm{d}t.$$

Pour tout $n > 0$, les n-ième coefficients de Fourier (trigonométriques) sont les scalaires

$$a_n(f) := \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos(nt) \, \mathrm{d}t, \quad b_n(f) := \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin(nt) \, \mathrm{d}t,$$

et on posera de plus $a_0(f) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \, \mathrm{d}t$ et $b_0(f) = 0$.

Remarque : Notons $e_k(t) := e^{ikt}$. Alors $(e_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ est une famille orthonormée, et le coefficient $c_k(f)$ n'est rien d'autre que le projecteur $\langle e_k, f \rangle$.

Les choses sont légèrement plus compliquées pour les coefficients a_n et b_n. On veut écrire

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(f) \cos(nx) + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n(f) \sin(nx).$$

Cependant, la famille $(\cos(nt))_{n\geq 0} \cup (\sin(nt))_{n\geq 1}$ est orthogonale, mais pas normée. Les coefficients $a_n(f)$ et $b_n(f)$ sont donc égaux à

$$\frac{\langle \cos(n\cdot), f\rangle}{\langle \cos(n\cdot), \cos(n\cdot)\rangle}, \quad \frac{\langle \sin(n\cdot), f\rangle}{\langle \sin(n\cdot), \sin(n\cdot)\rangle}$$

respectivement. Or, pour tout $n \geq 1$, les fonctions $\cos^2(n\cdot)$ et $\sin^2(n\cdot)$ sont de moyenne $1/2$ sur une période, donc un facteur 2 apparaît dans l'expression des coefficients $a_n(f)$ et $b_n(f)$.

0.12 Propriétés élémentaires des coefficients de Fourier

Propriété : Soit $f \in \mathcal{CM}_{2\pi}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n(f) = [c_n(f) + c_{-n}(f)], \quad b_n(f) = i[c_n(f) - c_{-n}(f)],$$
$$c_n(f) = \frac{a_n(f) - ib_n(f)}{2}, \quad c_{-n}(f) = \frac{a_n(f) + ib_n(f)}{2}.$$

La donnée de $(c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$ est donc équivalente à la donnée jointe de $(a_n(f))_{n\geq 0}$ et de $(b_n(f))_{n\geq 1}$.

Propriété : Soit $f \in \mathcal{CM}_{2\pi}$. Si f est paire, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$c_n(f) = c_{-n}(f) = \frac{a_n(f)}{2} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\cos(nt)\, \mathrm{d}t, \quad b_n(f) = 0.$$

En particulier, si f est à valeurs réelles, alors les coefficients $c_n(f)$ aussi.

Propriété : Soit $f \in \mathcal{CM}_{2\pi}$. Si f est impaire, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$c_n(f) = -c_{-n}(f) = \frac{b_n(f)}{2i} = \frac{1}{\pi i}\int_0^{\pi} f(t)\sin(nt)\, \mathrm{d}t, \quad a_n(f) = 0.$$

En particulier, si f est à valeurs réelles, alors les coefficients $c_n(f)$ sont imaginaires purs.

L'avantage de travailler avec les coefficients réels est donc double :

- ▷ Si f est à valeurs réelles, alors les coefficients de Fourier aussi.
- ▷ Si de plus on dispose d'information sur la parité de f, alors on peut travailler seulement avec les coefficients $a_n(f)$ ou seulement avec les coefficients $b_n(f)$. Au lieu de travailler avec une suite bi-infinie de nombres complexes, on utilise une seule suite de nombres réels. C'est le cas, par exemple, de l'équation de la chaleur avec conditions au bord de Dirichlet ou de von Neumann, et des travaux de Fourier.

Cependant, il y a divers inconvénients algébriques à utiliser les séries de Fourier trigonométriques : utilisation de deux familles de fonctions distinctes, expression différente pour le terme constant, normalisation différente, le fait que la dérivation échange ces familles... Pour ces raisons, nous allons dans la suite travailler uniquement avec les séries de Fourier exponentielles.

Propriété : Soient $f \in \mathcal{CM}_{2\pi}$ et $a \in \mathbb{R}$. Posons $f_a(x) := f(x+a)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Alors, pour tout $k \in \mathbb{Z}$,

$$c_k(f_a) = e^{ika} c_k(f).$$

Propriété : Soit $f \in \mathcal{CM}_{2\pi}$. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$,

$$c_k(\overline{f}) = \overline{c_{-k}(f)}.$$

En particulier, si f est à valeurs réelles, alors la fonction $k \mapsto c_k(f)$ est paire.

Il faut savoir que ces propriétés existent, mais elles ne sont pas à connaître par cœur ; en effet, cela conduirait vite à faire des erreurs de signe, et les définitions des coefficients a_n, b_n, c_n peuvent varier en fonction des sources. Afin de les démontrer, le lemme suivant [3] est très utile :

Propriété : Soit $f \in \mathcal{CM}_{2\pi}$. Soit $a \in \mathbb{R}$. Alors

$$\int_0^{2\pi} f(t)\ \mathrm{d}t = \int_a^{a+2\pi} f(t)\ \mathrm{d}t.$$

Démonstration : Par la relation de Chasles,

$$\int_a^{a+2\pi} f(t)\ \mathrm{d}t - \int_0^{2\pi} f(t)\ \mathrm{d}t = \int_{2\pi}^{2\pi+a} f(t)\ \mathrm{d}t - \int_0^a f(t)\ \mathrm{d}t = \int_0^a [f(t+2\pi) - f(t)]\ \mathrm{d}t = 0.$$

Nous n'allons pas démontrer toute les propriétés ci-dessus. Nous en donnons une en exemple :

Démonstration : Démontrons par exemple que $c_n(f) = c_{-n}(f)$ si f est paire ; les autres propriétés se traitent de façon similaire. Soit $f \in \mathcal{CM}_{2\pi}$ une fonction paire. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Grâce au petit lemme technique ci-dessus,

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-int} f(t)\ \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{int} f(-t)\ \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{int} f(t)\ \mathrm{d}t = c_{-n}(f).$$

0.13 Coefficients de Fourier et dérivée

La transformée de Fourier échange régularité et décroissante à l'infini : plus f est régulière, plus $\hat{f}$ décroît vite à l'infini, et réciproquement, plus f décroît vite à l'infini, plus $\hat{f}$ est régulière.

Dans le cadre des séries de Fourier, on travaille avec des fonctions 2π-périodique, dont la transformée est une suite. Dans le cadre de fonctions 2π-périodiques, il n'y a pas de notion de "décroissance à l'infini" ; de plus, il n'y a pas non plus de notion de régularité pour des suites. Il reste l'autre sens de cette correspondance : plus f est régulière, plus ses coefficients de Fourier décroissent vite à l'infini.

Propriété : Soit $f \in \mathcal{CM}_{2\pi}$. Supposons de plus que f est continue et $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$ (respectivement $k \geq 0$, ou $k \geq 1$),

$$c_k(f') = ikc_k(f), \quad a_k(f') = kb_k(f), \quad b_k(f') = -ka_k(f).$$

Démonstration : Nous allons le démontrer pour les coefficients de Fourier exponentiels uniquement. Soit f une fonction $\mathcal{C}^1$ et 2π-périodique. Soit $k \in \mathbb{Z}$. Il suffit d'intégrer par parties :

$$\begin{aligned} c_k(f') &= \int_0^{2\pi} e^{-ikt} f'(t)\ \mathrm{d}t \\ &= \left[e^{-ikt} f(t)\right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} -ike^{-ikt} f(t)\ \mathrm{d}t \\ &= ik \int_0^{2\pi} -ike^{-ikt} f(t)\ \mathrm{d}t \\ &= ikc_k(f). \end{aligned}$$

Si f est seulement continue, $\mathcal{C}^1$ et 2π-périodique, les choses sont plus compliquées. Soit $(\alpha_i)_{0 \leq i \leq p}$ une subdivision de $[0, 2\pi]$ et (g_i) une famille de fonctions telle que chaque g_i soit $\mathcal{C}^1$ et coïncide

3. Facile à démontrer si on utilise la bonne astuce, mais peut être pénible si on part du mauvais pied.

avec f sur $[\alpha_i, \alpha_{i+1}]$ (notons que, par continuité de f, elle coïncide avec g_i aussi aux extrémités de l'intervalle). Alors

$$\begin{aligned}
c_k(f') &= \sum_{i=0}^{p-1} \int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} e^{-ikt} g_i'(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \sum_{i=0}^{p-1} \left(\left[e^{-ikt} g_i(t) \right]_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} - \int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} -ike^{-ikt} g_i(t)\,\mathrm{d}t \right) \\
&= \sum_{i=0}^{p-1} \left[e^{-ik\alpha_{i+1}} g_i(\alpha_{i+1}) - e^{-ik\alpha_i} g_i(\alpha_i) \right] + ik \int_0^{2\pi} e^{-ikt} f(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \sum_{i=0}^{p-1} \left[e^{-ik\alpha_{i+1}} f(\alpha_{i+1}) - e^{-ik\alpha_i} f(\alpha_i) \right] + ikc_k(f) \\
&= ikc_k(f),
\end{aligned}$$

les termes de la somme s'annulant deux à deux.

Attention : La régularité d'une fonction est toujours à comprendre comme la régularité de son extension 2π-périodique à $\mathbb{R}$. En particulier, la fonction $x \mapsto x$ est peu régulière : quand on l'étend périodiquement, elle est discontinue en chaque point de la forme $2\pi k$, où $k \in \mathbb{Z}$.

0.14 Décroissance à l'infini des coefficients de Fourier : fonctions continues par morceaux

Soit $f \in \mathcal{CM}_{2\pi}$. On peut contrôler de diverses façons les coefficients de Fourier de f. D'une part, ces coefficients sont bornés.

Proposition : Pour tout $f \in \mathcal{CM}_{2\pi}$ et $n \in \mathbb{Z}$,

$$|c_n(f)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|\,\mathrm{d}t.$$

Autrement dit, $\|c\|_\infty \leq \frac{1}{2\pi} \|f\|_1$.

D'autre part, d'après le lemme de Riemann-Lebesgue, ces coefficients décroissent à l'infini.

Proposition : Pour tout $f \in \mathcal{CM}_{2\pi}$,

$$\lim_{n \to \pm\infty} c_n(f) = 0.$$

On dispose enfin d'un lemme plus fort que le lemme de Riemann-Lebesgue, l'**inégalité de Bessel**.

Proposition : Pour tout $f \in \mathcal{CM}_{2\pi}$,

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2\,\mathrm{d}t.$$

Autrement dit, $\|c\|_2 \leq \|f\|_2$, où la norme $\|\cdot\|_2$ est associée au produit scalaire hermitien utilisé jusqu'à présent (avec un facteur $\frac{1}{2\pi}$).

Démonstration : Soit $f \in \mathcal{D}_{2\pi}$. Soit $N \geq 0$. Posons $S_N(f) := \sum_{k=-N}^{N} c_k(f) e_k$. Alors $S_N(f)$ est le projeté orthogonal de f sur $\mathrm{Vect}(e_{-N}, \ldots, e_N)$. En particulier, $f - S_N(f)$ et $S_N(f)$ sont orthogonaux, donc, par le théorème de Pythagore,

$$\begin{gathered}
\|S_N(f) + (f - S_N(f))\|_2^2 = \|S_N(f)\|_2^2 + \|f - S_N(f)\|_2^2 \\
\|f\|_2^2 \geq \|S_N(f)\|_2^2 .
\end{gathered}$$

Or, encore par le théorème de Pythagore, $\|S_N(f)\|_2^2 = \sum_{k=-N}^{N} |c_k(f)|^2$. Il reste à faire tendre N vers $+\infty$ pour obtenir le résultat souhaité. Si $f \in \mathcal{CM}_{2\pi}$, soit $g \in \mathcal{D}_{2\pi}$ la fonction qui coïncide avec f sauf éventuellement en un nombre fini de points. Alors l'inégalité de Bessel est vraie pour g, et on peut remplacer g par f dans toutes les intégrales sans en changer la valeur.

L'inégalité de Bessel entraîne ici le lemme de Riemann-Lebesgue. Elle implique aussi que la suite $(c_n(f))$ soit bornée, même si la borne obtenu est moins bonne que la borne naïve $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)| \, \mathrm{d}t$.

L'inégalité de Bessel sera bientôt remplacée par un résultat plus fort, mais plus subtil et plus difficile à démontrer : l'identité de Parseval.

Si l'on travaille avec les séries de Fourier trigonométriques, l'inégalité de Bessel s'exprime sous la forme suivante :

$$a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n(f)|^2 + \frac{1}{2}\sum_{n\in\mathbb{N}} |b_n(f)|^2 \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 \, \mathrm{d}t.$$

Pour retrouver les coefficients dans ce cas, le plus simple est d'écrire l'égalité avec $f(x) = \cos(nx)$, et $a_n(f) = 1$ (de même avec la série des sinus).

Exemple : La suite $b_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ n'est pas série de Fourier trigonométrique d'une fonction continue par morceaux. La suite $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$ converge néanmoins simplement.

Remarque : La première borne et l'inégalité de Bessel se généralisent en les **inégalités de Hausdorff-Young**[4] : pour tout $p \in [2, +\infty)$,

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^p \leq \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^{\frac{p}{p-1}} \, \mathrm{d}t\right)^{p-1}.$$

La premire inégalité correspond au cas $p = +\infty$ (après avoir renormalisé cette inégalité), et l'inégalité de Bessel au cas $p = 2$.

0.15 Décroissance à l'infini des coefficients de Fourier : fonctions $\mathcal{C}^k$

Si f est de classe $\mathcal{C}^k$, on peut coupler la partie précédente à l'expression explicite des coefficients de Fourier de f' en fonction de ceux de f. Par exemple, le lemme de Riemann-Lebesgue devient :

Proposition : Pour toute fonction f de classe $\mathcal{C}^k$ et 2π-périodique,

$$c_n(f) =_{\pm\infty} o(n^{-k}).$$

En particulier, si $k \geq 2$, alors la suite $(c_n(f))$ est sommable.

Démonstration : $c_n(f^{(k)}) = (in)^k c_n(f) = o(1)$.

Remarque : On peut affaiblir très légèrement les hypothèses. Cette proposition s'applique en fait aux fonctions de classe $\mathcal{C}^{k-1}$, $\mathcal{C}^k$ par morceaux, et 2π-périodique. Cette généralisation est rarement utile.

L'inégalité de Bessel devient :

Proposition : Pour toute fonction f de classe $\mathcal{C}^k$ et 2π-périodique,

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} n^{2k} |c_n(f)|^2 \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f^{(k)}(t)|^2 \, \mathrm{d}t.$$

Cette inégalité reste valable si f est de classe $\mathcal{C}^{k-1}$, $\mathcal{C}^k$ par morceaux, et 2π-périodique.

4. Complètement hors programme, cela va sans dire ; il s'agit cependant d'un bel exemple d'inégalité obtenue par interpolation.

Cette dernière inégalité est particulièrement intéressante couplée à l'inégalité de Cauchy-Schwarz :
Proposition : Pour toute fonction f continue, de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux et 2π-périodique,

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)| \leq |c_0(f)| + \sqrt{\frac{\pi}{6}\int_0^{2\pi} |f'(t)|^2 \, \mathrm{d}t}.$$

En particulier, $(c_n(f))$ est sommable. On a amélioré l'estimation donnée par le lemme de Riemann-Lebesgue, qui demandait que f soit $\mathcal{C}^2$.
Démonstration : On calcule :

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\n\neq 0}} |c_n(f)| &= \sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\n\neq 0}} |c_n(f)||n||n|^{-1} \\ &\leq \sqrt{\sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\n\neq 0}} |c_n(f)|^2 n^2 \cdot \sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\n\neq 0}} n^{-2}} \\ &\leq \sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f^{(k)}(t)|^2 \, \mathrm{d}t \cdot 2\zeta(2)}.\end{aligned}$$

Le calcul de $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$ est non élémentaire, mais une application classique de l'égalité de Parseval. Cette propriété est utilisée par exemple pour démontrer le développement eulérien

$$\operatorname{cotan}(\pi x) = \frac{\cos(\pi x)}{\sin(\pi x)} = \frac{1}{\pi x} + \frac{2x}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{x^2 - n^2}.$$

Remarque : Un théorème plus général et plus difficile affirme que, si f est lipschitzienne et 2π-périodique, alors $(c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$ est sommable. Voir *[MVT, Développement C6, p.166]*.

Reconstruction du signal

0.16 Position du problème

Soit $f \in \mathcal{CM}_{2\pi}$. Le but initial est d'écrire

$$f = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(f) e_k.$$

Avant toutes choses, il faut savoir en quel sens cette somme converge. Dans ce qui suit, on posera

$$S_N(f) := \sum_{k=-N}^{N} c_k(f) e_k.$$

Remarque : On parle aussi de **noyau de Dirichlet** appliqué à f. De plus, pour tout $f \in \mathcal{CM}_{2\pi}$, tout $t \in \mathbb{R}$ et tout $n \geq 0$,

$$S_n(f)(t) = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f) e^{ikt} = a_0(f) + \sum_{k=1}^{n} \left[a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)\right].$$

Ce que l'on dit pour les séries exponentielles reste valable pour les séries trigonométriques.

Par construction, pour toute partie finie $J \subset \mathbb{Z}$,

$$\left\| \sum_{k \in J} c_k(f) e_k \right\|_2^2 = \sum_{k \in J} |c_k(f)|^2.$$

Par conséquent, soit $N \geq 0$ et $m \geq \ell \geq N$. Alors

$$\|S_m(f) - S_\ell(f)\|_2^2 = \sum_{k=\ell+1}^{n} \left(|c_k(f)|^2 + |c_{-k}(f)|^2\right) \leq \sum_{k=N}^{+\infty} \left(|c_k(f)|^2 + |c_{-k}(f)|^2\right).$$

Par l'inégalité de Bessel, le membre de droite converge vers 0 quand N tend vers $+\infty$. La suite $(S_N(f))_{N \geq 0}$ est donc de Cauchy pour la norme $\|\cdot\|_2$.

Le problème, c'est que $\mathcal{CM}_{2\pi}$ n'est pas complet pour la norme $\|\cdot\|_2$; on ne sait pas si $(S_N(f))$ converge vers une fonction continue par morceaux. Si l'on essaie de compléter $\mathcal{CM}_{2\pi}$, on sera assuré que $(S_N(f))$ converge vers une classe d'équivalence de suites de Cauchy de fonctions continues par morceaux ; mais il n'est pas du tout évident qu'un tel objet est une fonction ! En pratique, il faut utiliser la théorie de la mesure pour construire des classes de fonctions suffisamment larges pour contenir ces limites ; en encore, la limite ne sera pas exactement une fonction, mais une classe d'équivalence de fonctions [5].

Au niveau auquel sont introduites les séries de Fourier, on ne dispose pas de ces outils. Il va donc falloir se satisfaire d'autres formes de convergence. Les modes de convergence connus sont :

- ▷ La convergence simple ;
- ▷ La convergence uniforme.

Nous allons nous concentrer essentiellement sur le second mode de convergence.

0.17 Convergence uniforme des polynômes trigonométriques

La convergence uniforme est plus important que la convergence simple, car elle permet de faire passer des propriétés importantes (continuité) à la limite. L'outil principal sera la proposition (évidente) suivante :

Proposition : Soit $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ une suite sommable, c'est-à-dire telle que $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n| < +\infty$. Alors la série de fonctions

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{int}$$

converge normalement, donc uniformément. En particulier, la série ainsi définie est continue.

On vérifie de plus que, dans ce cadre, les coefficients c_n sont bien les coefficients de Fourier de la série :

Proposition : Soit $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ une suite sommable, c'est-à-dire telle que $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n| < +\infty$. Soit $g := \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e_n$. Alors $c_n = c_n(g)$.

Démonstration : Il s'agit d'une interversion somme-intégrale, possible grâce au théorème de Fubini :

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_0^{2\pi} \left| c_k e^{int} e^{-ikt} \right| \, \mathrm{d}t \leq 2\pi \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n| < +\infty,$$

donc :

$$c_k(g) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_0^{2\pi} c_n e^{int} e^{-ikt} \, \mathrm{d}t = c_k.$$

5. Voir la définition des espaces de Lebesgue $\mathbb{L}^2([0, 2\pi])$.

0.18 Théorème de Parseval

Un des théorèmes les plus importants de théorie de Fourier est le **théorème de Parseval**, et la **formule de Parseval** qui en découle :

Théorème (Parseval) : Pour tout $f \in \mathcal{CM}_{2\pi}$,

$$\lim_{n\to+\infty} \left\| f - \sum_{k=-n}^{n} c_n(f) e_n \right\|_2 = 0.$$

Formule de Parseval : Pour tout $f \in \mathcal{CM}_{2\pi}$,

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f|^2(t)\ \mathrm{d}t.$$

Ce théorème a deux applications très importantes :

- ▷ Garantir la convergence du processus de reconstruction vers la fonction initiale ;
- ▷ Fournir un nombre remarquable d'identités extrêmement utiles.

Le deuxième point se manifestera dans les développements. Attardons-nous sur le premier.

Nous allons avoir besoin de plusieurs résultats intermédiaires. Nous admettrons le premier :

Proposition : L'espace des polynômes trigonométriques de période 2π est dense, pour la norme $\|\cdot\|_\infty$, dans l'espace des fonctions continues de période 2π.

Il s'agit d'une proposition difficile, analogue à la densité des polynômes dans les espaces de fonctions continues. On peut procéder de différentes façon ; avec des critères généraux de densité dans les espaces de fonctions continues (généralisations du théorème de Stone-Weierstrass), des suites approchantes explicites [FGN2, Exercice 4.29], ou encore en appliquant astucieusement le théorème de Stone-Weierstrass. Ces approches dépassent tous le cadre de ce cours.

Proposition : L'espace des polynômes trigonométriques de période 2π est dense, pour la norme $\|\cdot\|_2$, dans $\mathcal{CM}_{2\pi}$.

Démonstration : Soit $f \in \mathcal{CM}_{2\pi}$ et $\varepsilon > 0$. Soit $(\alpha_i)_{1\leq i\leq p}$ une subdivision adaptée à f. Soit $\delta > 0$ tel que $2\delta < \min_i\{\alpha_{i+1} - \alpha_i\}$. Soit g la fonction qui interpole linéairement f sur chaque intervalle $[\alpha_i - \delta, \alpha_i + \delta]$. Alors :

- ▷ $|g(t) - f(t)| \leq 2\|f\|_\infty$ pour tout $t \in \bigcup_i [\alpha_i - \delta, \alpha_i + \delta]$;
- ▷ $g(t) = f(t)$ en-dehors de ces intervalles.

Par conséquent,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |g(t) - f(t)|^2\ \mathrm{d}t \leq p \cdot \frac{2\delta}{2\pi} \cdot (2\|f\|_\infty)^2,$$

et donc $\|f - g\|_2 \leq \frac{2\sqrt{p}}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\delta}\,\|f\|\infty$. Si δ est suffisamment petit, la fonction g est telle que $\|f - g\|_2 < \varepsilon$. Soit P un polynôme trigonométrique tel que $\|g - P\|_\infty < \varepsilon$. Alors $\|g - P\|_2 < \varepsilon$, donc $\|f - P\|_2 < 2\varepsilon$. Cela termine la démonstration de la proposition.

Démonstration du théorème de Parseval : Soit $f \in \mathcal{CM}_{2\pi}$. Soit $\varepsilon > 0$. Soit P un polynôme trigonométrique tel que $\|f - P\|_2 < \varepsilon$.

On calcule alors :

$$\|S_N(f) - f\|_2 \leq \|S_N(f - P)\|_2 + \|S_N(P) - P\|_2 + \|P - f\|_2$$

One sait que $\|P - f\|_2 < \varepsilon$. De plus, si $N \geq \deg(P)$, alors $S_N(P) = P$. Enfin, par l'inégalité de Bessel,

$$\|S_N(f - P)\|_2 \leq \|f - P\|_2 < \varepsilon.$$

Donc, $\|S_N(f) - f\|_2 < 2\varepsilon$ pour tout $N \geq \deg(P)$. Ceci termine la démonstration du théorème de Parseval.

L'identité de Parseval en découle car, par conséquent,

$$\|f\|_2^2 = \lim_{N\to+\infty} \|S_N(f)\|_2^2 = \lim_{N\to+\infty} \sum_{k=-N}^{N} |c_k(f)|^2 = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k(f)|^2.$$

Remarque : L'inégalité de Bessel repose uniquement sur le fait que la famille $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est orthonormée, et donc libre. L'inégalité de Bessel reste donc vraie, par exemple, pour $(c_n(f))_{n\geq 0}$, alors que la formule de Parseval est fausse dans ce cadre.

Le théorème de Parseval affirme, en un certain sens, que $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une base de $\mathcal{D}_{2\pi}$: ces vecteurs engendrent, en un certain sens [6], toutes les fonctions de $\mathcal{D}_{2\pi}$.

Remarque : Plus généralement, le théorème de Parseval affirme non seulement une égalité de normes, mais aussi une égalité de produits scalaires hermitiens. Pour tous f, $g \in \mathcal{CM}_{2\pi}$,

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \overline{c_n(f)} \cdot c_n(g) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{f(t)} \cdot g(t) \, \mathrm{d}t.$$

0.19 Convergence uniforme des séries de Fourier

Grâce à cela, on peut vérifier la convergence des séries de Fourier de f vers f :

Corollaire : Soit f une fonction continue, $\mathcal{C}^1$ par morceaux, et 2π-périodique. Alors

$$f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f) e^{int},$$

où la convergence est uniforme.

Démonstration : Soit g la limite uniforme de cette série trigonométrique. Alors

$$\lim_{N\to+\infty} \|S_N(f) - g\|_\infty = 0,$$

donc $\lim_{N\to+\infty} \|S_N(f) - g\|_2 = 0$. Or $\lim_{N\to+\infty} \|S_N(f) - f\|_2 = 0$ par le théorème de Parseval, donc $f = g$.

Remarque : Si f n'est pas assez régulière, il est tout à fait possible que $S_n(f)$ ne converge pas vers f partout (voire, en travaillant avec des fonctions très peu régulière – moins régulières que $\mathcal{CM}_{2\pi}$ – qu'elle ne converge vers f *nulle part* !).

0.20 Convergence simple

Si f n'est pas continue, alors f n'est pas limite uniforme de sa série de Fourier. Les théorèmes sont dans ce cadre plus difficiles à obtenir. Mentionnons :

Théorème (Dirichlet) : Soit $f \in \mathcal{D}_{2\pi}$ une fonction $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Alors la série de Fourier $(S_N(f))_{N\geq 0}$ converge simplement vers f.

Remarquons que, si $f \in \mathcal{CM}_{2\pi}$ et $\mathcal{C}^1$ par morceaux, alors $(S_N(f))_{N\geq 0}$ ne converge pas nécessairement partout vers f : en chaque point de discontinuité α, cette série converge vers

$$\frac{\lim_{x\to\alpha^-} f(x) + \lim_{x\to\alpha^+} f(x)}{2}.$$

6. Pas au sens algébrique : l'ensemble des combinaisons linéaires finies des e_n est, par définition, l'espace des polynômes trigonométriques. Il faut plutôt regarder du côté des bases hilbertiennes, ce qui suppose de travailler dans $\mathbb{L}^2([0, 2\pi])$.

Le théorème de Dirichlet peut (légèrement) se généraliser :

Théorème (Jordan) : Soit f une fonction 2π-périodique et à variation bornée. Alors la série de Fourier $(S_N(f))_{N\geq 0}$ converge simplement vers la fonction g, où pour tout α :

$$g(\alpha) = \frac{\lim_{x\to\alpha^-} f(x) + \lim_{x\to\alpha^+} f(x)}{2}.$$

Développements possibles

Voir la feuille de TD jointe pour une liste de développements. Nous nous limiterons ici à une liste non exhaustive de développements possibles, qui nous semblent particulièrement intéressants :

- ▷ Calcul des valeurs de la fonction ζ aux entiers pairs ($\zeta(2)$, $\zeta(4)$, etc. ; éventuellement, lien avec les nombres de Bernoulli) ;
- ▷ Équation de la chaleur, si possible sur le cercle pour éviter les difficultés techniques liées aux conditions au bord ;
- ▷ Développement de la fonction cotan, éventuellement suivi de l'écriture du sinus en produit infini dû à Euler ;
- ▷ Inégalité de Wirtinger et inégalité isopérimétrique ;
- ▷ Phénomène de Gibbs ;
- ▷ Critère de Weyl (équirépartition de progressions arithmétiques modulo 1) ;
- ▷ Formule sommatoire de Poisson...