Leçon 212 : Série de Fourier d'une fonction périodique ; propriétés de la somme. Exemples.

Prérequis

Connaissances préalables et notations :
- ▷ Espaces préhilbertiens sur les corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
- ▷ Projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel de dimension finie.
- ▷ Théorème de Stone-Weierstrass trigonométrique.

On note $\mathcal{CM}_{2\pi}$ l'espace des fonctions 2π-périodiques continues par morceaux sur l'intervalle $[0, 2\pi]$.
On note $\mathcal{D}_{2\pi} \subset \mathcal{CM}_{2\pi}$ l'ensemble des fonctions $f \in \mathcal{CM}_{2\pi}$ telles que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(\lim_{x^-} f + \lim_{x^+} f\right).$$

Série de Fourier d'une fonction périodique

Définition : Soit $f \in \mathcal{CM}_{2\pi}$. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, le k-ième coefficient de Fourier (exponentiel) est le nombre complexe

$$c_k(f) := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-ikt}\,\mathrm{d}t.$$

Pour tout $n > 0$, les n-ième coefficients de Fourier (trigonométriques) sont les scalaires

$$a_n(f) := \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t, \quad b_n(f) := \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t,$$

et on posera de plus $a_0(f) := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,\mathrm{d}t$ et $b_0(f) = 0$.

Propriété : Soit $f \in \mathcal{CM}_{2\pi}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n(f) = [c_n(f) + c_{-n}(f)], \quad b_n(f) = i[c_n(f) - c_{-n}(f)],$$
$$c_n(f) = \frac{a_n(f) - ib_n(f)}{2}, \quad c_{-n}(f) = \frac{a_n(f) + ib_n(f)}{2}.$$

Propriété : Soit $f \in \mathcal{CM}_{2\pi}$. Si f est paire, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$c_n(f) = c_{-n}(f) = \frac{a_n(f)}{2} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t, \quad b_n(f) = 0.$$

En particulier, si f est à valeurs réelles, alors les coefficients $c_n(f)$ aussi. Si f est impaire, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$c_n(f) = -c_{-n}(f) = \frac{b_n(f)}{2i} = \frac{1}{\pi i}\int_0^{\pi} f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t, \quad a_n(f) = 0.$$

En particulier, si f est à valeurs réelles, alors les coefficients $c_n(f)$ sont imaginaires purs.

Propriété : Soient $f \in \mathcal{CM}_{2\pi}$ et $a \in \mathbb{R}$. Posons $f_a(x) := f(x + a)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Alors, pour tout $k \in \mathbb{Z}$,

$$c_k(f_a) = e^{ika}c_k(f).$$

Propriété : Soit $f \in \mathcal{CM}_{2\pi}$. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$,

$$c_k(\overline{f}) = \overline{c_{-k}(f)}.$$

En particulier, si f est à valeurs réelles, alors la fonction $k \mapsto c_k(f)$ est paire.

Propriété : Soit $f \in \mathcal{CM}_{2\pi}$. Supposons de plus que f est continue et $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$ (respectivement $k \geq 0$, ou $k \geq 1$),

$$c_k(f') = ikc_k(f), \quad a_k(f') = kb_k, \quad b_k(f') = -ka_k(f).$$

Définition : Soit $f \in \mathcal{CM}_{2\pi}$. La **série de Fourier** de f est la série de terme général $(u_n)_{n\geq 0}$, où

$$\begin{aligned} &u_0(t) = c_0(f) \quad \forall t \in \mathbb{R}, \\ &u_n(t) = c_n(f)e^{int} + c_{-n}(f)e^{-int} \quad \forall t \in \mathbb{R},\ \forall n \geq 1. \end{aligned}$$

On notera $S_n(f)$ la n-ième somme partielle de la série de Fourier de f.

Définition : Soit $f \in \mathcal{CM}_{2\pi}$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$ et tout $n \geq 0$,

$$S_n(f)(t) = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)e^{ikt} = a_0(f) + \sum_{k=1}^{n} \left[a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)\right].$$

Structure pré-hilbertienne et convergence de la série de Fourier

Proposition : L'espace $\mathcal{D}_{2\pi}$, muni de la forme hermitienne

$$\langle f, g\rangle := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overline{f}(t)g(t)\ \mathrm{d}t$$

est un espace préhilbertien. Pour ce produit hermitien, la famille $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est orthonormée, où $e_n : t \mapsto e^{int}$. On notera $\|\cdot\|$ la norme hermitienne associée.

Proposition (Inégalité de Bessel) : Pour tout $f \in \mathcal{D}_{2\pi}$,

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f|^2(t)\ \mathrm{d}t.$$

Exemple : La série trigonométrique $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nt)}{\sqrt{n}}$ converge, mais n'est pas somme d'une série de Fourier d'une fonction continue par morceaux.

Théorème (Parseval) : Pour tout $f \in \mathcal{D}_{2\pi}$,

$$\lim_{n\to+\infty} \left\| f - \sum_{k=-n}^{n} c_n(f)e_n \right\|_2 = 0.$$

Formule de Parseval : Pour tout $f \in \mathcal{D}_{2\pi}$,

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f|^2(t)\ \mathrm{d}t.$$

Remarque : Les trois propriétés précédentes s'étendent aux fonctions de $\mathcal{CM}_{2\pi}$.

Théorème de convergence normale des séries de Fourier : Soit f une fonction continue, $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $[0, 2\pi]$, et 2π-périodique. Alors la série de Fourier $\left(\sum_{k=-n}^{n} c_n(f)e_n\right)_{n\geq 0}$ converge normalement vers f.

Applications

Voir la feuille de TD jointe pour une liste de développements. Nous nous limiterons ici à une liste non exhaustive de développements possibles, qui nous semblent particulièrement intéressants :

- ▷ Calcul des valeurs de la fonction ζ aux entiers pairs ($\zeta(2)$, $\zeta(4)$, etc. ; éventuellement, lien avec les nombres de Bernoulli) ;
- ▷ Équation de la chaleur, si possible sur le cercle pour éviter les difficultés techniques liées aux conditions au bord ;
- ▷ Développement de la fonction cotan, éventuellement suivi de l'écriture du sinus en produit infini dû à Euler ;
- ▷ Inégalité de Wirtinger et inégalité isopérimétrique ;
- ▷ Phénomène de Gibbs ;
- ▷ Critère de Weyl (équirépartition de progressions arithmétiques modulo 1) ;
- ▷ Formule sommatoire de Poisson...

Références

Pour le contenu du cours : beaucoup de livres ont une présentation trop superficielle au niveau exigé pour l'agrégation, ou bien trop technique. Je conseille :

- ▷ **[RW] : *Mathématiques Tout-en-un pour la Licence.* Ramis, Warusfel** est une excellente référence sur le sujet, et celle que je conseille en premier lieu. Ce livre est disponible en version numérique aux oraux de l'agrégation.
- ▷ **[D] : *Mathématiques pour l'agrégation interne. Analyse et probabilités.* Dantzer** est aussi une excellente référence sur le sujet.
- ▷ **[QZ] : *Analyse pour l'agrégation.* Queffélec, Zuily** est lui aussi très correct.

Remarquons que, si l'article sur les séries de Fourier de Wikipedia manque d'énoncés mathématiques précis et adaptés, il reste un bon texte d'introduction.

Pour les développements, on regardera en particulier :

- ▷ **[FGN2] : *Exercices de mathématiques des oraux de l'Ecole Polytechnique et des Ecoles Normales Supérieures. Analyse 2.* Francinou, Gianella, Nicolas.** Beaucoup d'exercices techniques n'ont pour but que de tester les compétences techniques des candidats. Ceci dit, ce livre contient quelques perles, qui ont l'avantage d'énoncés courts et de corrections rigoureuses. Excellent pour qui cherche des énoncés et corrigés précis.
- ▷ **[MVT] : *Suites et séries de fonctions.* Moisan, Vernotte, Tosel**. On y trouve beaucoup de développements intéressants, que l'on peut presque choisir à l'aveugle.

D'autres références peuvent aussi être très utiles. Des développements possibles et les références associées sont détaillés dans la feuille d'exercies jointe.