

## Développement eulérien de la fonction cotangente

Soit  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ . Définissons la fonction  $f$  telle que  $f(x) = \cos(\alpha x)$  pour  $x \in (-\pi, \pi]$  et  $f$  soit  $2\pi$ -périodique.

Comme  $\cos(\alpha\pi) = \cos(\alpha(-\pi))$ , la fonction  $f$  est continue et  $\mathcal{C}^1$  par morceaux. Comme elle est réelle et paire, nous allons utiliser les coefficients de Fourier trigonométriques  $(a_n)_{n \geq 0}$  et  $(b_n)_{n \geq 0}$ . Plus précisément,  $b_n(f) = 0$  pour tout  $n \geq 0$ , et pour tout  $n \geq 1$ ,

$$\begin{aligned} a_n(f) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(\alpha t) \cos(nt) \, dt \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(\alpha t) \cos(nt) \, dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [\cos((\alpha+n)t) + \cos((\alpha-n)t)] \, dt \\ &= \frac{1}{\pi} \left[ \frac{\sin((\alpha+n)t)}{\alpha+n} + \frac{\sin((\alpha-n)t)}{\alpha-n} \right]_0^{\pi} \\ &= \frac{1}{\pi} \left[ \frac{\sin((\alpha+n)\pi)}{\alpha+n} + \frac{\sin((\alpha-n)\pi)}{\alpha-n} \right] \\ &= \frac{(-1)^n}{\pi} \left[ \frac{\sin(\alpha\pi)}{\alpha+n} + \frac{\sin(\alpha\pi)}{\alpha-n} \right] \\ &= \frac{(-1)^n}{\pi} \frac{2\alpha \sin(\alpha\pi)}{\alpha^2 - n^2}. \end{aligned}$$

On a utilisé en particulier la formule de linéarisation  $\cos(a) \cos(b) = \frac{\cos(a+b) + \cos(a-b)}{2}$ . Le calcul de  $a_0(f)$  est similaire, et mène à

$$a_0(f) = \frac{\sin(\alpha\pi)}{\alpha\pi}.$$

La fonction  $f$  étant continue et  $\mathcal{C}^1$  par morceaux, la série de Fourier de  $f$  converge normalement vers  $f$ . Par conséquent, pour tout  $x \in [-\pi, \pi]$ ,

$$\cos(\alpha x) = f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(f) \cos(nx) = \frac{\sin(\alpha\pi)}{\alpha\pi} + \frac{2\alpha \sin(\alpha\pi)}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cos(nx)}{\alpha^2 - n^2}.$$

En particulier, pour  $x = \pi$ ,

$$\cos(\pi\alpha) = \frac{\sin(\alpha\pi)}{\alpha\pi} + \frac{2\alpha \sin(\alpha\pi)}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cos(n\pi)}{\alpha^2 - n^2} = \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi\alpha} + \frac{2\alpha \sin(\pi\alpha)}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\alpha^2 - n^2}.$$

Comme  $\alpha$  n'est pas entier,  $\sin(\pi\alpha) \neq 0$ , et donc :

$$\cotan(\pi\alpha) = \frac{\cos(\pi\alpha)}{\sin(\pi\alpha)} = \frac{1}{\pi\alpha} + \frac{2\alpha}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\alpha^2 - n^2}. \quad (1)$$

Finalement, en posant  $x = \pi\alpha \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$ ,

$$\begin{aligned}\cotan(x) &= \frac{1}{x} + 2x \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{x^2 - \pi^2 n^2} \\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\pi^2 n^2 - x^2} &= \frac{1}{2x} \left( \frac{1}{x} - \cotan(x) \right).\end{aligned}$$

Afin de déterminer la valeur de  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ , on voudrait prendre  $x = 0$  dans l'équation précédente. On peut d'ailleurs vérifier, par exemple à l'aide d'un développement limité, que le membre de droite est prolongeable par continuité en 0. Cependant, cette équation n'est a priori valable que dans  $\mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$ . Soit  $R \in (0, \pi)$ . La série de fonctions  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\pi^2 n^2 - x^2}$  converge normalement sur  $[-R, R]$ ; en effet, pour tout  $x \in [-R, R]$ ,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left| \frac{1}{\pi^2 n^2 - x^2} \right| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\pi^2 n^2 - R^2} < +\infty.$$

Par conséquent, la fonction  $x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\pi^2 n^2 - x^2}$  est continue sur  $[-R, R]$ , et en particulier est continue en 0. Il reste à prendre la limite :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\pi^2 n^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\pi^2 n^2 - x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{2x} \left( \frac{1}{x} - \cotan(x) \right).$$

Un développement limité suffit à conclure ; en 0 :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2x} \left( \frac{1}{x} - \cotan(x) \right) &= \frac{1}{2x^2} \left( 1 - \frac{x \left( 1 - \frac{x^2}{2} + O(x^4) \right)}{x - \frac{x^3}{6} + O(x^5)} \right) \\ &= \frac{1}{2x^2} \left( 1 - \left( 1 - \frac{x^2}{2} + O(x^4) \right) \left( 1 + \frac{x^2}{6} + O(x^4) \right) \right) \\ &= \frac{1}{2x^2} \left( \frac{x^2}{3} + O(x^4) \right) \\ &= \frac{1}{6} + O(x^2).\end{aligned}$$

En particulier,  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\pi^2 n^2} = \frac{1}{6}$ , ou encore  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ .

### Références

Pour ce développement, ainsi qu'une continuation permettant de retrouver le produit eulérien

$$\frac{\sin(\pi x)}{\pi x} = \prod_{n=1}^{+\infty} \left( 1 - \frac{x^2}{n^2} \right),$$

obtenu en intégrant l'équation (1), nous renvoyons le lecteur au texte *Oraux X-Ens, Analyse 2, p.289*.