Séries entières. Notes de cours

Dans toute la leçon, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

L'algèbre des séries entières

Rappel : Un polynôme sur $\mathbb{K}$ est une suite d'éléments de $\mathbb{K}$ n'ayant qu'un nombre fini de termes non nuls. Formellement, $P = (a_0, \cdots, a_n, 0, \cdots)$. On peut aussi écrire $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, mais là encore, il ne s'agit que d'une écriture formelle. Il faudrait en général distinguer le polynôme de la fonction polynôme. Cependant, quand $\mathbb{K}$ est infini, le polynôme est déterminé par la fonction polynôme associée, ce qui fait que les abus de langage ne sont pas (trop) dommageables.

Étant donnés deux polynômes $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et $Q(X) = \sum_{k=0}^{m} b_k X^k$,

- ▷ Leur somme est le polynôme $\sum_{k=0}^{\max\{n,m\}} (a_k + b_k) X^k$.
- ▷ Le produit de P par un élément λ de $\mathbb{K}$ est $\lambda P(X) := \sum_{k=0}^{n} \lambda a_k X^k$.
- ▷ Le produit de deux polynômes est $\sum_{k=0}^{n+m} c_k X^k$, où $c_k = \sum_{\ell=0}^{k} a_\ell b_{k-\ell}$ (**produit de Cauchy**).

On peut aussi définir une dérivée formelle $P'(X) = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) a_{k+1} X^k$, des primitives formelles, une loi de composition formelle... Ces définitions sont faites pour coïncider avec les opérations usuelles sur les fonctions polynômes. En particulier, $\mathbb{K}[X]$ est une $\mathbb{K}$-algèbre commutative.

On peut définir de même des **séries formelles**, qui ne sont que des suites d'éléments de $\mathbb{K}$, munies de ces mêmes opérations. Là encore, on obtient une $\mathbb{K}$-algèbre commutative. On définit aussi une dérivée formelle :

Définition 0.1. *Soient $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n$ une série entière. La **série dérivée** est $\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} X^n$.*

On peut de même définir des séries dérivées successives ; pour $k \geq 0$, la k-ième série dérivée a pour coefficients

$$(n+1) \cdots (n+k) a_{n+k} = \frac{(n+k)!}{n!} a_{n+k}.$$

De même, on définit des primitives formelles, ou des compositions formelles. Par exemple, si $f(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n$ avec $a_0 = 0$ et $g(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n X^n$, alors

$$\begin{aligned} g \circ f(X) &= \sum_{n=0}^{+\infty} b_n \left(\sum_{k=1}^{+\infty} a_k X^k \right)^n \\ &= b_0 + b_1 a_1 X + (b_1 a_2 + b_2 a_1^2) X^2 + (b_1 a_3 + 2 b_2 a_1 a_2 + b_3 a_1^3) X^3 + \cdots \end{aligned}$$

Comme avec les développements limités, les premiers termes de $g \circ f(X)$ ne dépendent que des premiers termes de f et de g, donc s'expriment comme fonctions des coefficients sans que la question de la convergence se pose. On peut même définir des opérations non disponibles pour les polynômes ; par exemple, si $a_0 = 0$ et $a_1 \neq 0$, alors $f(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n$ admet un inverse formel, c'est-à-dire une série formelle $g(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n X^n$ telle que $g \circ f = f \circ g = \mathrm{id}$. D'autres opérations existent qui n'ont pas d'interprétation fonctionnelle aussi simple.

Cependant, un nouveau problème apparaît par rapport aux fonctions polynomiales : donner un sens à la fonction $z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$. Quand celle-ci converge-t-elle ?

Rayon de convergence

0.1 Définition

Une telle série converge toujours pour $z = 0$.

Si $a_n = 1$ pour tout n, on reconnaît une série géométrique qui converge si et seulement si $|z| < 1$.

Définition 0.2. *Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite d'éléments de $\mathbb{K}$. Alors le* **rayon de convergence** *de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ est*

$$R := \sup\{r \geq 0,\ (a_n r^n)_{n\geq 0} \text{ est bornée}\} \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}.$$

Remarquons qu'avec cette définition, $(a_n r^n)_{n\geq 0}$ est bornée pour tout $r < R$; autrement dit, l'ensemble $\{r \geq 0,\ (a_n r^n)_{n\geq 0}$ est bornée$\}$ est un intervalle.

D'autres définitions sont équivalentes, par exemple $R = \sup\left\{r \geq 0,\ \sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n < +\infty\right\}$. Montrer l'équivalence de ces définitions n'est pas si difficile, mais reste un peu long ; il faut choisir une définition et s'y tenir.

0.2 Disque de convergence

Proposition 0.3. *Soit $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R.*

- ▷ *Si $R = 0$, alors la série ne converge que pour $z = 0$.*
- ▷ *Si $R = +\infty$, alors la série converge pour tout $z \in \mathbb{K}$.*
- ▷ *Si $0 < R < +\infty$:*
  - ▷ *Si $|z| < R$, la série converge absolument.*
  - ▷ *Si $|z| > R$, la série diverge grossièrement.*

Si $|z| = R$, la convergence de la série dépend du cas considéré.

Éléments de démonstration : Soit $z \in \mathbb{K}$. Si $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ converge, alors nécessairement $|a_n||z|^n$ est bornée, donc $|z| \leq R$. Il ne reste qu'à montrer la convergence pour $0 < |z| < R$:

- ▷ Si $R < +\infty$, alors la suite $(|a_n|\sqrt{|z|R}^n)$ est bornée car $\sqrt{|z|R} < R$, donc la série $\sum_{n\geq 0} |a_n||z|^n = \sum_{n\geq 0} |a_n|\sqrt{|z|R}^n \sqrt{|z|/R}^n$ converge.
- ▷ Si $R = +\infty$, on pourra remplacer $\sqrt{|z|R}$ par $2|z|$.

0.3 Critères de convergence

Il existe une formule générale permettant de calculer le rayon de convergence d'une série (critère dû à Hadamard) :

$$R = \frac{1}{\lambda}, \qquad \text{où } \lambda = \limsup_{n\to+\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \sup_{k\geq n} |a_k|^{\frac{1}{k}}.$$

On utilisera toujours la convention $\frac{1}{0} = +\infty$ et $\frac{1}{+\infty} = 0$.

Éléments de démonstration : Les cas particulier $\lambda \in \{0, +\infty\}$ se traitent à part. λ est l'unique réel tel que :

- ▷ pour tout $\mu > \lambda$, il n'existe qu'un nombre fini d'entiers n tels que $|a_n| > \mu^n$.
- ▷ pour tout $\mu < \lambda$, il existe un nombre infini d'entiers n tels que $|a_n| > \mu^n$.

Si $r > \frac{1}{\lambda}$, alors $1/r < \lambda$, donc il existe un nombre infini d'entiers tels que $|a_n| > r^{-n}$. Mais alors, il existe un nombre infini d'entiers tels que $|a_n r^n| > 1$, donc la suite de terme général $a_n r^n$ n'est pas bornée. Donc $r \geq R$. Ceci étant vrai pour tout $r > \frac{1}{\lambda}$, on obtient $\frac{1}{\lambda} \geq R$.

Si $r < R$, alors $1/r > \lambda$, donc il n'existe qu'un nombre fini d'entiers tels que $|a_n| > r^{-n}$. Mais alors, la suite de terme général $a_n r^n$ est bornée, donc $r \leq R$. Ceci étant vrai pour tout $r < \frac{1}{\lambda}$, on obtient $\frac{1}{\lambda} \leq R$.

On retrouve aussitôt le critère de Cauchy : si la limite $\lambda = \lim_{n\to+\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}$ existe, alors $R = 1/\lambda$.

On retrouve ensuite le critère de d'Alembert : si les a_n sont non nuls et si la limite $\lambda = \lim_{n\to+\infty} |a_{n+1}/a_n|$ existe, alors $R = 1/\lambda$.

En pratique, le critère général est hors programme. On présentera donc la définition, les règles de d'Alembert et de Cauchy. Cependant, il faut savoir démontrer directement ces règles ! De plus, ces deux derniers critères, contrairement au premier, ne couvrent pas tous les cas possibles ; **ce ne sont pas des conditions nécessaires**. Si la série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ a un rayon de convergence de 2, on ne peut pas en déduire que $\lim_{n\to+\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} = 1/2$. On peut seulement en déduire que *si cette limite existe*, alors elle vaut 1/2.

D'autres critères plus simples, mais ne traitant que de cas particuliers, existent :

- ▷ Si $(a_n r^n)_{n\geq 0}$ est bornée, alors $r \leq R$.
- ▷ Si $(a_n r^n)_{n\geq 0}$ diverge, alors $r \geq R$.
- ▷ Si $a_n r^n = O(n^\alpha)$ pour un certain $\alpha \in \mathbb{R}$, alors $R \geq r$.
- ▷ Si $|a_n| r^n \geq C n^\alpha$ pour des constantes C, $\alpha \in \mathbb{R}$, alors $R \leq r$.
- ▷ Si $a_n \sim b_n$, alors $R(a) = R(b)$ (sans contrainte de signe !) : en effet, $a_n r^n \sim b_n r^n$ pour tout r, donc $(a_n r^n)$ est bornée si et seulement si $(b_n r^n)$ l'est.

0.4 Exemples

La série $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$ est une série géométrique de raison 1. Elle est de rayon de convergence 1, et diverge en tout point du cercle unité.

La série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n}$ est de rayon de convergence 1. Elle diverge en $z = 1$, et est semi-convergente en tout autre point du cercle unité.

La série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n^2}$ est de rayon de convergence 1, et converge absolument sur le disque fermé $\overline{B}(0,1)$.

La série $\sum_{n=0}^{+\infty} \cos(n) z^n$ est de rayon de convergence 1. Cependant, le critère de d'Alembert ne s'applique pas. L'application du critère de Cauchy est faisable, mais utilise des outils *très* largement hors du programme de l'agrégation.

La série exponentielle $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ est de rayon de convergence infini (règle de d'Alembert).

Les critères de d'Alembert et de Cauchy ne sappliquent pas à la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \cosh(n) z^{2n}$; en effet, la suite associée est $a_{2n} = \cosh(n)$ et $a_{2n+1} = 0$. Pour cela, on fixe $r > 0$. On sait que $\cosh(n) r^{2n} \sim \frac{e^n r^{2n}}{2}$; ces suites étant positives, les séries correspondantes sont de même nature. En particulier, la série de terme général $\cosh(n) r^{2n}$ converge si et seulement si $r < e^{-\frac{1}{2}}$. Donc $R = e^{-\frac{1}{2}}$.

La série $\sum_{n=0}^{+\infty} z^{2^n}$ se traite de la même façon. La suite associée est lacunaire ($a_n = 1$ si n est une puissance de 2, et 0 sinon). En utilisant la méthode précédente, on montre que $R = 1$.

De même, la série $\sum_{n=0}^{+\infty} (n!) z^{2^n}$ a pour rayon de convergence 1. On pourra utiliser le critère de d'Alembert à la suite $((n!) r^{2^n})$.

Enfin, soit $a_{2n} = 2^n$ et $a_{2n+1} = 3^n$. Là encore, les critères de d'Alembert et de Cauchy ne s'appliquent pas. Cependant, pour tous $r > 0$, la série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n$ converge si et seulement si les deux séries extraites $\sum_{n=0}^{+\infty} 2^n r^{2n}$ et $r \sum_{n=0}^{+\infty} 3^n r^{2n}$ convergent. On trouve un rayon de convergence $R = \min\{1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{3}\} = 1/\sqrt{3}$.

0.5 Opérations sur les séries entières

Proposition 0.4. *Soient $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectifs R et R'. Soit R'' le rayon de convergence de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) z^n$. Alors :*

- $\triangleright$ $R'' \geq \min\{R, R'\}$.
- $\triangleright$ *Si* $R \neq R'$, *alors* $R'' = \min\{R, R'\}$.
- $\triangleright$ *Pour tout* $z \in B(0, \min\{R, R'\})$, *on a* $\sum_{n=0}^{+\infty}(a_n + b_n)z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$.

Démonstration : Commençons par le premier point. Soit $r < \min\{R, R'\}$. Alors les suites $(a_n r^n)$ et $(b_n r^n)$ sont bornées, donc la suite $((a_n + b_n)r^n)$ aussi, donc $r \leq R''$. En faisant tendre r vers $\min\{R, R'\}$, on obtient $\min\{R, R'\} \leq R''$.

Supposons maintenant que $R \neq R'$; sans perte de généralité, supposons que $R < R'$ et montrons que $R'' = R$. Soit $R < r < R'$. Alors la suite $(a_n r^n)$ diverge et la suite $(b_n r^n)$ est bornée, donc la suite $((a_n + b_n)r^n)$ diverge, donc $R'' \leq r$. En faisant tendre r vers R, on obtient $R'' \leq R$. Or on sait déjà que $R'' \geq \min\{R, R'\} = R$, donc $R'' = R$.

Enfin, si $|z| < \min\{R, R'\}$, alors les trois séries convergent, donc l'égalité suit.

Proposition 0.5. *Soient* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ *et* $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$ *deux séries entières de rayons de convergence respectifs* R *et* R'. *Soit* R'' *le rayon de convergence de la série* $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$, *où* (c_n) *est le produit de Cauchy de* (a_n) *et* (b_n). *Alors* $R'' \geq \min\{R, R'\}$.

Démonstration : Soit $r < \min\{R, R'\}$. Alors les séries $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| r^n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} |b_n| r^n$ convergent, et leur produit est égal à $\sum_{n=0}^{+\infty} d_n r^n$, où d_n est le produit de Cauchy de $(|a_n|)$ et de $(|b_n|)$. L'interversion de sommes est justifiées car tous les termes sont positifs. Or

$$|c_n| = \left|\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right| \leq \sum_{k=0}^{n} |a_k b_{n-k}| = d_n,$$

donc la série $\sum_{n=0}^{+\infty} |c_n| r^n$ converge, donc $r \leq R''$. En faisant tendre r vers $\min\{R, R'\}$, on obtient $\min\{R, R'\} \leq R''$.

Attention : Même si $R \neq R'$, en général, on n'a pas $R'' = \min\{R, R'\}$. Regarder par exemple le produit de $\frac{1}{1-z}$ et de $(1 - z)$.

Proposition 0.6. *Une série et sa série dérivée ont le même rayon de convergence.*

Par conséquent, une série et ses dérivées k-ièmes ont aussi le même rayon de convergence.

Éléments de démonstration : Soit R le rayon de convergence d'une série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ et R' le rayon de convergence de la série dérivée.

Soit $r < R$. Supposons que $R < +\infty$. Alors $\sqrt{Rr} < R$, donc la suite $(a_{n+1}(\sqrt{Rr})^n)$ est bornée, de même que la suite $((n + 1)(\sqrt{r/R})^n)$, donc la suite $((n + 1)r^n)$ est aussi bornée, donc $r \leq R'$. On obtient donc $R \leq R'$. Si $R = +\infty$, on remplace $\sqrt{Rr}$ par $2r$.

Supposons que $R < +\infty$. Soit $r > R$. Alors $(a_{n+1} r^n)$ diverge, donc a fortiori $((n+1)a_{n+1} r^n)$ diverge, donc $r \geq R$. On obtient donc $R \geq R'$, et donc $R = R'$.

De même, les séries $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_{n-1}}{n} z^n$ ont le même rayon de convergence.

Propriétés de la somme

Dans ce qui suit, on fixe une série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ de rayon de convergence $R > 0$. Pour tout $z \in B(0, R)$, on pose $f(z) := \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$.

Définition 0.7 (Dérivée complexe)**.** *Soit* f *une fonction définie sur un disque complexe ouvert centré en l'origine* $B(0, R)$. *On dit que* f *est* ***dérivable*** *en* $z \in B(0, R)$ *si, pour toute suite de nombres complexes* $(z_n)_{n\geq 0}$ *dans* $B(0, R) \setminus z$ *convergeant vers* z, *la limite*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{f(z_n) - f(z)}{z_n - z}$$

existe, et ne dépend pas de $(z_n)_{n\geq 0}$. *On notera alors* $f'(z)$ *cette limite.*

Attention : Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, il s'agit d'une dérivation par rapport à une variable **complexe**. Ce n'est pas la même chose qu'un dérivation par rapport aux variables réelles. Il ne s'agit pas d'identifier $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}^2$ et de dériver la fonction comme fonction de deux variables réelles ! Si f admet une dérivée au complexe, alors elle admet une dérivée vue comme fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$. La réciproque est fausse ; par exemple, la fonction $z \mapsto \overline{z}$ n'admet pas de dérivée complexe (Exercice !).

De la même façon, on peut définir des dérivées succesives.

Proposition 0.8. *Soit $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Notons $f(z)$ sa somme pour tout $z \in B(0, R)$. Alors :*

- ▷ *f est continue sur $B(0, R)$.*
- ▷ *f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $B(0, R)$, au sens réel ou en sens complexe suivant que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et dérivable terme à terme : pour tout $z \in B(0, R)$,*

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) \cdots (n+k) a_{n+k} z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+k)!}{n!} a_{n+k} z^n.$$

- ▷ *En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

- ▷ *Pour tout $n \geq 0$, la fonction f admet un développement limité en 0 à l'ordre n :*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k + O(z^{n+1}).$$

- ▷ *f admet une primitive F donnée par $F(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_{n-1}}{n} z^n$. En particulier, si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, alors pour tout $x \in (-R, R)$,*

$$\int_0^x f(t)\, \mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_{n-1}}{n} x^n.$$

Éléments de démonstration : Pour la continuité : soit $r < R$. Chaque fonction $f_n : z \mapsto a_n z^n$ est continue sur $\overline{B}(0, r)$, et $\sum_{n=0}^{+\infty} \|f_n\|_\infty = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| r^n < +\infty$, donc la série de fonction converge normalement. Par conséquent, f est continue sur $\overline{B}(0, r)$. Le réel r étant arbitraire, f est continue sur $B(0, R)$.

Montrons maintenant que f est dérivable sur $B(0, R)$ et que sa dérivée est donnée par la série dérivée g. Soit $z \in B(0, R)$ et (z_n) une suite d'éléments de $B(0, R) \setminus \{z\}$ convergeant vers z. Soit $|z| < r < R$. Soit $N \geq 0$ tel que, pour tous $n \geq N$, on ait $z_n \in B(0, r)$. Alors :

$$\begin{aligned}
\frac{f(z_n) - f(z)}{z_n - z} &= \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \frac{z_n^k - z^k}{z_n - z} \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \sum_{\ell=0}^{k-1} z_n^\ell z^{k-1-\ell} \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \left[k z^{k-1} + \sum_{\ell=0}^{k-1} (z_n^\ell - z^\ell) z^{k-1-\ell} \right] \\
&= g(z) + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \sum_{\ell=0}^{k-1} (z_n^\ell - z^\ell) z^{k-1-\ell}.
\end{aligned}$$

Contrôlons le terme d'erreur :

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=1}^{+\infty} a_k \sum_{\ell=0}^{k-1}(z_n^\ell - z^\ell)z^{k-1-\ell}\right| &\leq \sum_{k=1}^{+\infty}|a_k|\sum_{\ell=0}^{k-1}\ell r^\ell |z_n - z| r^{k-1-\ell}\\ &= |z_n - z|\sum_{k=1}^{+\infty}|a_k|\sum_{\ell=0}^{k-1}\ell r^{k-1}\\ &= |z_n - z|\sum_{k=1}^{+\infty}|a_k|\frac{k(k-1)}{2}r^{k-1}.\end{aligned}$$

Mais la série $\sum_{k=1}^{+\infty}|a_k|\frac{k(k-1)}{2}r^{k-1}$ converge, donc

$$\left|\frac{f(z_n)-f(z)}{z_n - z} - g(z)\right| = O(|z_n - z|),$$

ce qui montre que f est bien dérivable en z et que $f'(z) = g(z)$.
Les autres assertions en découlent par récurrence.

Comportement au bord du disque de convergence

La convergence de la série en un point du bord du disque de convergence se fait par exemple à l'aide du théorème d'Abel.

Theorem 0.9 (Critère d'Abel)**.** *Soit $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R \in \mathbb{R}_+^*$. Supposons que la suite $(a_n R^{-n})_{n\geq 0}$ soit positive et décroissante. Alors la série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ converge pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| = R$ et $z \neq R$.*

Une fois que l'on sait que la série converge en un point du cercle, on a un résultat de continuité partielle :

Theorem 0.10 (Théorème d'Abel radial)**.** *Soit $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R < +\infty$. Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $|z_0| = R$. Si la série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z_0^n$ converge, alors elle converge uniformément sur le segment $[0, z_0]$. En particulier, cette série est continue sur le segment $[0, z_0]$.*

Attention : En particulier, si $z \to z_0$ le long du segment $[0, z_0]$, alors $f(z)$ converge vers $f(z_0)$. Ce théorème se généralise : si $z \to z_0$ en restant dans certains cônes, alors $f(z)$ converge vers $f(z_0)$. Il est en général faux que $f(z)$ converge vers $f(z_0)$ sans restriction sur le chemin choisi pour approcher z_0.

Cependant, ce résultat est largement suffisant pour des séries réelles. Par exemple, on verra que $\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}$. Cette dernière série a un rayon de convergence égal à 1, et converge en -1 (par exemple en tant que série alternée). Par conséquent,

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n} = \lim_{x\to -1} -\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n} = \lim_{x\to -1}\ln(1-x) = \ln(2).$$

De même, on montre que

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1} = \lim_{x\to 1}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} = \lim_{x\to 1}\arctan(x) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}.$$

Attention : D'autres séries n'admettent pas de prolongement par continuité au cercle, ou même sur un arc de cercle, bordant le disque de convergence. C'est le cas par exemple des séries lacunaires (contenant des suites arbitrairement longues de 0). Par exemple, la fonction $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} z^{2^n}$ tend vers $+\infty$ quand $z \to 1$ radialement. Mais cette fonction satisfait l'identité $f(z) = 1 + f(z^2)$, donc $f(z)$ tend vers $+\infty$ quand $z \to -1$ radialement. Par récurrence, on montre que $f(z)$ tend vers $+\infty$ quand $z \to e^{2\pi i \frac{k}{2^\ell}}$ radialement, où k et ℓ sont des entiers positifs. L'ensemble de ces points est dense sur le cercle unité. Pire, on peut trouver d'autres points vers lesquels f converge radialement vers $-\infty$, ou ne converge pas radialement !

Exercice : Étudier le comportement des sommes $\sum_{n=0}^{N-1} z^{2^n}$ pour $z = j := e^{\frac{2\pi i}{3}}$, puis de $f(z)$ quand z tend radialement vers j. En déduire qu'il existe un ensemble dense de directions sur lesquelles $f(z)$ converge[1] vers $-\infty$.

Fonctions développables en séries entières

0.6 Définitions

Définition 0.11. *Soit I un voisinage de 0 et $f : I \to \mathbb{C}$ une application. On dit que f est **développable en série entière** en 0, ce que l'on notera DSE_0, s'il existe une suite $(a_n)_{n\geq 0}$ et un réel $r > 0$ tels que*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \quad \forall x \in I \cap B(0, r).$$

Cette définition couvre à la fois des fonctions définies sur un intervalle ouvert contenant 0, et sur un disque ouvert complexe contenant 0.

La série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ a alors nécessairement un rayon de convergence $R \geq r$, et f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $I \cap B(0, r)$. De plus, si f est DSE_0, alors

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

La suite (a_n) est donc uniquement déterminée par f (ce qui permet de démontrer de nombreuses identités probabilistes ou combinatoires), et la série entière associée est donc la **série de Taylor** de f :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

Attention : On vient de voir qu'une condition nécessaire pour qu'une fonction définie au voisinage de 0 soit DSE_0 est qu'elle soit de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un voisinage de 0. Cette condition n'est pas suffisante ; être DSE_0 (ou, en d'autres termes, analytique) est strictement plus fort que d'être $\mathcal{C}^\infty$. Il y a deux raisons possibles pour qu'une fonction $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de 0 ne soit pas DSE_0 :

- ▷ La série de Taylor de f peut avoir un rayon de convergence nul. L'exemple suivant est issu de *Suites et séries de fonctions* de Moisan, Vernotte, Tosel, Exercice **C-7**. Soit $f(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n+n^2 ix}$.
  1. Vérifier que f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout $k \geq 0$ et $x \in \mathbb{R}$,
  $$f^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n^2 i)^k e^{-n+n^2 ix}.$$
  2. Montrer que, pour tout $k \geq 0$ divisible par 4,
  $$\frac{|f^{(k)}(0)|}{k!} \geq \frac{k^{2k} e^{-k}}{k!}.$$

  En conclure que le rayon de convergence de la série de Taylor est nul.

1. Attention : il s'agit ici d'une suite de complexe convergeant vers le $-\infty$ réel. En quel sens peut-on dire cela ?

Remarquons au passage que, si une fonction d'une variable réelle est DSE_0, alors elle s'étend naturellement à un voisinage ouvert complexe de 0 ; il suffit de prendre une variable complexe au lieu d'une variable réelle. Ici, on remarque que si l'on prend pour x une variable imaginaire pure plutôt que réelle, par exemple $x = -\varepsilon i$ avec $\varepsilon > 0$, alors la série définissant f ne converge plus, ce qui suffit à douter du fait que f soit DSE_0.

▷ La série de Taylor de f peut avoir un rayon de convergence $R > 0$, mais sa somme S n'est égale à f dans aucun voisinage de 0. C'est le cas par exemple de la fonction f définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{x}} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}.$$

On vérifie que f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et que $f^{(n)}(0) = 0$ pour tout n. Sa série de Taylor a donc un rayon de convergence infini, mais converge vers la fonction nulle, qui est donc différente de f.

Définition 0.12. *Soit x_0 un nombre réel ou complexe. Soit I un voisinage de x_0 et $f : I \to \mathbb{C}$ une application. On dit que f est développable en série entière en x_0, ce que l'on notera DSE_{x_0}, s'il existe une suite $(a_n)_{n\geq 0}$ et un réel $r > 0$ tels que*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n \quad \forall x \in I \cap B(x_0, r).$$

Autrement dit, f est développable en série entière en x_0 si et seulement si $g(x) := f(x + x_0)$ est DSE_0.

0.7 Opérations

Les propriétés suivantes sont des conséquences immédiates de la définition et des résultats précédents.

▷ La somme et le produit de deux fonctions DSE_{x_0} est une fonction DSE_{x_0}.

▷ Si f est DSE_{x_0}, alors f est $\mathcal{C}^\infty$ sur un voisinage de x_0 et ses dérivées successives sont DSE_{x_0}. Le développement en série entière de f' s'obtient en dérivant terme à terme celui de f.

▷ Si f est DSE_{x_0}, alors il en est de même de toute primitive F de f. Le développement en série entière de F s'obtient, à un constante près, en intégrant terme à terme celui de f.

Théorème 0.13 (Développement en série entière des fractions rationelles)**.** *Soit F une fraction rationelle et x_0 un complexe qui n'est pas un pôle de F. Alors :*

▷ *F est DSE_{x_0}.*

▷ *Le rayon de convergence de la série de Taylor de F est $R = \min\{|\alpha - x_0|;\ \alpha$ pôle de $F\}$.*

▷ *F est égale à la somme de sa série de Taylor dans $B(x_0, R)$.*

Éléments de démonstration : Sans perte de généralité, on peut supposer que $x_0 = 0$. Soit P l'ensemble des pôles de F et $\rho := \min\{|\alpha|;\ \alpha \in P\}$. Pour $\alpha \in P$, on note k_α la multiplicité du pôle α. La décomposition en éléments simples de F dans $\mathbb{C}$ s'écrit pour certaines constantes $a_{\alpha,p}$:

$$F(z) = E(z) + \sum_{\alpha \in P} \sum_{p=1}^{k_\alpha} \frac{a_{\alpha,p}}{(z - \alpha)^p}.$$

Pour tout $\alpha \neq 0$ et $|z| < |\alpha|$,

$$\frac{1}{z - \alpha} = -\frac{\alpha}{1 - \frac{z}{\alpha}} = -\frac{1}{\alpha} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{\alpha^n}.$$

Le rayon de convergence de la série obtenue est donc d'au moins α. En prenant les puissances, c'est aussi le cas pour $(z-\alpha)^{-p}$. Par conséquent, F est somme finie de fonctions DSE_0 de rayon de convergence au moins ρ, donc est DSE_0 de rayon de convergence $R \geq \rho$.

Supposons que $R > \rho$. Soit $\alpha \in P$ de module ρ. On sait que $F(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ sur $B(0,\rho)$ par ce qui précède. Par conséquent,

$$\lim_{t\to 1^-} \left| \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (t\alpha)^n \right| = \lim_{t\to 1^-} |F(t\alpha)| = +\infty.$$

Ceci contredit la continuité de $z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ sur $B(0,R)$. Par conséquent, $R = \rho$.

Remarque 0.14. *Il n'est pas surprenant que le rayon de convergence du développement en série entière de $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ en 0 soit de 1 : en 1, la fonction diverge. Cependant, cette remarque permet de mieux comprendre le rayon de convergence des développements en séries entières de $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$. Bien que cette fonction soit développable en série entière partout, en tout point x_0, le rayon de convergence de la série n'est que de $\sqrt{1+x_0^2}$, c'est-à-dire la distance dans $\mathbb{C}$ entre x_0 et $\{\pm i\}$. On voit ici l'ombre dans $\mathbb{R}$ d'un phénomène complexe.*

Cette borne sur le rayon de convergence est héritée par les primitives de $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$, et en particulier par la fonction arctan.

0.8 Méthodes de développements et développements usuels

Les fonctions exponentielle, sinus, cosinus, sinus hyperbolique, cosinus hyperboliques sont DSE_0 avec un rayon de convergence infini. Voir le chapitre consacré à l'exponentielle complexe. Pour obtenir un développement en série entière en un autre point, on se ramène à 0 à l'aide des formules d'addition : $e^{x_0+h} = e^{x_0}e^h$, et par exemple $\cos(x_0+h) = \cos(x_0)\cos(h) - \sin(x_0)\sin(h)$.

De nombreux développement se déduisent de celui de la série géométrique. Tous les développements qui suivent, sauf mention du contraire, ont un rayon de convergence de 1. On sait que, pour $|z| < 1$,

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n, \quad \frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n z^n.$$

Par intégration, on en déduit

$$-\ln(1-z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} z^n, \quad \ln(1+z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} z^n.$$

On peut obtenir des développement en série entière en d'autres points, avec d'autres rayons de convergence, en utilisant des identités telles que

$$\frac{1}{\alpha - z} = \frac{1}{\alpha}\frac{1}{1-\frac{z}{\alpha}}, \quad \ln(\alpha+z) = \ln(\alpha) + \ln\left(1+\frac{z}{\alpha}\right).$$

En remplaçant z par z^2, on déduit de la série géométrique

$$\frac{1}{1-z^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^{2n}, \quad \frac{1}{1+z^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n z^{2n}.$$

Par intégration, on en déduit

$$\operatorname{argtanh} z = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n+1} z^{2n+1}, \quad \arctan(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n+} z^{2n+1}.$$

Le développement en série entière de la fonction argtanh peut se retrouver à l'aide de l'identité $\operatorname{argtanh} z = \frac{\ln(1+z)-\ln(1-z)}{2}$.
Enfin, pour tout $p \geq 1$, en dérivant $p-1$ fois $\frac{1}{1-z}$, on obtient

$$\frac{1}{(1-z)^p} = \frac{1}{(p-1)!} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+p-1)!}{n!} z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+p-1}{n} z^n.$$

En posant $\binom{\alpha}{n} := \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$ pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$, cette dernière identité peut se réécrire

$$\frac{1}{(1-z)^p} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{-p}{n} (-1)^n z^n.$$

Cette formule se généralise :

Théorème 0.15. *Pour tout $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$, pour tout $x \in B(0,1)$,*

$$(1+z)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} z^n.$$

Le rayon de convergence de la série entière ci-dessus est toujours de 1. Pour α entier négatif, on retrouve le développement précédent.

Éléments de démonstration : On se place dans le cadre réel. Posons $f(x) = (1+x)^\alpha$. Cette fonction est l'unique solution sur $(-1,1)$ de l'équation différentielle

$$(1+x)y'(x) = \alpha y(x)$$

avec condition initiale $y(0) = 1$. L'unicité de la solution découle du théorème de Cauchy-Lipschitz pour les équations différentielles linéaires.

On cherche une solution développable en série entière de cette même équation. Notons $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. Alors y est une solution formelle de cette équation si $a_0 = 1$ et, pour tout $n \geq 0$,

$$(n+1)a_{n+1} + na_n = \alpha a_n,$$

ou, autrement dit, $a_{n+1} = \frac{\alpha-n}{n+1} a_n$. Par récurrence, $a_n = \binom{\alpha}{n}$.

Le fait que cette série formelle soit une solution formelle de l'équation différentielle implique que, si son rayon de convergence est strictement positif, alors la fonction associée est une (vraie) solution de l'équation différentielle sur un voisinage de 0. Or, par le critère de d'Alembert,

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{\alpha-n}{n+1}\right| \to_{n\to+\infty} 1,$$

donc la série entière obtenue a un rayon de convergence de 1 : c'est une solution de l'équation différentielle $(1+x)y'(x) = \alpha y(x)$ avec condition initiale $y(0) = 1$ sur l'intervalle $(-1,1)$. Par unicité, elle doit coïncider avec f.

Applications : Pour $\alpha = -1/2$, on calcule

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\frac{-1}{2} \cdot \frac{-3}{2} \cdot \frac{1-2n}{2}}{n!} = \frac{(-1)^n \cdot 1 \cdot 3 \cdot (2n-1)}{2^n \cdot n!} = \frac{(-1)^n \cdot (2n)!}{2^{2n} \cdot (n!)^2} = \frac{(-1)^n}{4^n} \binom{2n}{n}.$$

Par conséquent, pour tout $x \in (-1,1)$,

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4^n} \binom{2n}{n} (-1)^n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{4^n} \binom{2n}{n} x^n.$$

Une formule similaire, mais un peu plus compliquée, existe pour $\alpha = \frac{1}{2}$. En remplaçant x par $\pm x^2$ et en intègrant, on obtient pour tout $x \in (-1,1)$:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n} \cdot (n!)^2} x^{2n}, \\
\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(2n)!}{2^{2n} \cdot (n!)^2} x^{2n}, \\
\arcsin(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2n+1} \frac{(2n)!}{2^{2n} \cdot (n!)^2} x^{2n+1}, \\
\operatorname{argsinh}(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \frac{(2n)!}{2^{2n} \cdot (n!)^2} x^{2n+1}.
\end{aligned}$$

Applications

0.9 Probabilités : Fonctions génératrices

Définition 0.16. *Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $p_n := \mathbb{P}(X = n)$. On appelle* ***fonction génératrice*** *de X l'application G définie par $G(t) := \sum_{n=0}^{+\infty} p_n t^n$.*

Théorème 0.17. *X admet une espérance si et seulement si G' a une limite à gauche en 1. Dans ce cas, $\mathbb{E}(X) = G'(1)$.*
X admet une variance si et seulement si $G^{(2)}$ a une limite à gauche en 1. Dans ce cas, $G^{(2)}(1) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)$.

Application : On peut ainsi calculer plus généralement les moments de variables aléatoires discrètes. Par exemple,

- ▷ Si X suit une loi de Bernouilli $B(n,p)$, alors $G(t) = ((1-p)+pt)^n$. On calcule $G(1) = 1$, puis $G'(1) = np$ et $G''(1) = n(n-1)p^2$, donc on retrouve $\mathbb{E}(X) = np$ et $\mathrm{Var}(X) = n(n-1)p^2 + np - n^2p^2 = np(1-p)$.
- ▷ Si X suit une loi géométrique [2] de paramètre p, alors $G(t) = \frac{p}{1-(1-p)t}$. On calcule $G(1) = 1$, puis $G'(1) = \frac{1-p}{p}$ et $G''(1) = \frac{2(1-p)^2}{p^2}$, donc on retrouve $\mathbb{E}(X) = \frac{1-p}{p}$ et $\mathrm{Var}(X) = \frac{1-p}{p^2}$.
- ▷ Si X suit une loi de Poisson de paramètre λ, alors $G(t) = e^{\lambda(t-1)}$. On calcule $G(1) = 1$, puis $G'(1) = \lambda$ et $G''(1) = \lambda^2$, donc on retrouve $\mathbb{E}(X) = \lambda$ et $\mathrm{Var}(X) = \lambda$.

Une variation sur ce thème est la **fonction génératrice des moments**, qui a l'avantage de s'appliquer à des lois à densité.

Définition 0.18. *Soit X une variable aléatoire à valeurs réelles (a fortiori, ceci s'applique aux variables aléatoires à valeurs entières). On appelle* ***fonction génératrice des moments*** *de X l'application H définie, quand l'espérance converge, par $H(t) := \mathbb{E}(e^{tX})$.*

2. Ici, la loi géométrique de paramètre p est le nombre d'échecs avant d'obtenir une réussite, où les réussites sont indépendantes et de probabilité p.

Cette fois-ci, la fonction H n'est pas définie explicitement comme une série entière. Cependant, en pratique, elle sera presque toujours une fonction développable en série entière si la loi de X est usuelle. De plus, on retrouve plus facilement les moments à l'aide de la fonction génératrice des moments qu'à l'aide de la fonction génératrice : si H est dérivable k fois sous le signe intégral sur un voisinage de 0, alors $\mathbb{E}(X^k) = H^{(k)}(0)$.

L'application aux lois de Bernoulli, géométrique, de Poisson est laissée en exercice. Les lois exponentielle et de Laplace donnent aussi lieu à des calculs simples. Nous allons nous focaliser sur une application importante, celle de la **loi normale** de paramètre $\sigma > 0$. Celle-ci a pour densité la fonction $x \mapsto \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$. Soit X une variable aléatoire de telle loi. On calcule, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(e^{tX}) &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2 - 2t\sigma^2 x}{2\sigma^2}} \,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x^2 - t\sigma^2)^2 - (t\sigma^2)^2}{2\sigma^2}} \,\mathrm{d}x \\
&= e^{\frac{(\sigma t)^2}{2}} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x^2 - t\sigma^2)^2}{2\sigma^2}} \,\mathrm{d}x \\
&= e^{\frac{(\sigma t)^2}{2}}.
\end{aligned}$$

Or cette fonction est développable en série entière en 0 :

$$H(t) := \mathbb{E}(e^{tX}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sigma^{2n} t^{2n}}{2^n \cdot n!},$$

et donc $\mathbb{E}(X^{2k}) = \frac{(2k)!}{2^k \cdot k!}\sigma^{2k}$ et $\mathbb{E}(X^{2k+1}) = 0$ pour tout k.

0.10 Analyse : Résolution d'équations différentielles

Nous renvoyons aux applications présentées dans le livre *Suites et séries de fonctions* de Moisan, Vernotte, Tosel, et en particulier le développement en série entière de la fonction de Bessel et la résolution de l'équation de Riccati. Les énoncés sont repris dans la feuille d'exercice jointe.

0.11 Combinatoire : Calcul de suites

De nombreuses applications intéressantes sont possibles ; nous en présentons quelques-unes. Un ouvrage très riche et de plus haut niveau sur le sujet est l'excellent *Generatingfunctionology* de Wilf.

0.11.1 Nombres de Catalan

Une définition des **nombres de Catalan** est qu'il s'agit de l'unique suite d'entiers $(C_n)_{n\geq 0}$ satisfaisant l'équation de récurrence $C_0 = 1$ et $C_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} C_k C_{n-k}$ pour tout $n \geq 0$. Ils ont de nombreuses applications en combinatoire, qu'il serait vain de résumer ici [3].

On peut en trouver une expression explicite grâce aux séries entières. Soit $f(X) := \sum_{n=0}^{+\infty} C_n X^n$ la série entière formelle correspondante. La relation de récurrence se rapproche d'un produit de

3. Ne pas hésiter à aller voir Wikipedia, en particulier en Anglais !

Cauchy ; plus précisément, la série de terme général $\sum_{k=0}^{n} C_k C_{n-k} X^n$ est $f^2(X)$, alors que la série de terme général C_{n+1} est $\frac{f(X)-1}{X}$. Ainsi, une série formelle g a pour coefficients la suite $(C_n)_{n\geq 0}$ si et seulement si $g(0) = 1$ et $g^2(X) = \frac{g(X)-1}{X}$.

Or on trouve une fonction qui satisfait ces contraintes : la fonction $g(x) = \frac{1+\sqrt{1-4x}}{2x}$. Celle-ci est bien développable en série entière en 0, avec un rayon de convergence positif, ce qui permet d'identifier ses coefficients. On trouve à l'aide des développements en série entière usuels $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$.

Voir aussi *Suites et séries de fonctions* de Moisan, Vernotte, Tosel, problème **E7**, qui motive l'étude de cette suite à l'aide d'un problème combinatoire concret (dénombrement d'arbres).

0.11.2 Nombres de partitions

Une partition d'un entier positif n est une écriture $n = k_1 + \cdots + k_r$, où les k_i sont strictement positifs. Suivant que l'ordre des k_i est important ou non, on obtient deux notions de partitions, et donc deux suites d'entiers. Dans les deux cas, les série entières sont particulièrement importantes dans l'étude de ces suites. On se réfère à *Suites et séries de fonctions* de Moisan, Vernotte, Tosel, problème **E6**, dans le cas de partitions ordonnées. Le cas de partitions non ordonnées est beaucoup plus riche, mais vraisemblablement trop complexe pour un développement d'agrégation ; il est présenté en **Exercice 23 p. 63** dans *Cours de mathématiques - 3 – Compléments d'analyse* d'Arnaudiès, Fraysse.

0.11.3 Nombres de chemins

Soit G un graphe (orienté ou non) de matrice d'adjacence M. Soit A un sommet de G. Le nombre de cycles de longueur n partant de A, c'est-à-dire le nombre de chemins de longueur n partant de A et revenant à A, est $a_n := (M^n)_{AA}$. La fonction génératrice de ce nombre de chemin est donc

$$f(z) := \sum_{n=0}^{+\infty} (M^n)_{AA} z^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} z^n M^n \right)_{AA} = \left[(I - zM)^{-1} \right]_{AA}.$$

Cette série a un rayon de convergence strictement positif, car les coefficients de la matrice M^n croissent au plus exponentiellement vite.

Qu'en est-il des chemins de longueur n, partant de A et revenant *pour la première fois* en A après n pas ? Notons b_n le nombre de tels chemins ($b_0 = 1$) et g la série entière associée. Remarquons qu'un chemin de longueur $n \geq 1$ s'écrit de façon unique comme la concaténation d'un chemin de longueur k comprise entre 1 et n revenant pour la première fois en A après k pas, et d'un chemin de $n - k$ pas de A à A. Par conséquent, pour tout $n \geq 1$,

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} b_k a_{n-k}.$$

On reconnaît à droite le produit de Cauchy entre $g - 1$ et f. En faisant attention au terme constant, on obtient

$$f - 1 = (g - 1)f$$
$$g = 2 - \frac{1}{f},$$

ce qui permet ensuite de calculer explicitement les premiers termes de la suite (b_n), ou de déduire des informations qualitatives sur cette suite.

Par exemple, si G est le graphe complet à $N \geq 1$ sommets, alors $a_n = \frac{(N-1)^n+(N-1)(-1)^n}{N}$, donc $f(z) = \frac{1+2z-Nz}{(1+z)(1-(N-1)z)}$, donc $g(z) = 1 + \frac{(n-1)z^2}{1-(N-2)z}$. On trouve finalement $b_0 = 1$, $b_1 = 0$, et $b_n = (N-1)(N-2)^{n-2}$ pour tout $n \geq 2$.
Ces propriétés restent valides pour des graphes infinis. Par exemple, si G est le graphe sur $\mathbb{Z}$ dont deux sommets sont voisins s'ils sont à distance 1, alors $a_{2n} = \binom{2n}{n}$ et $a_{2n+1} = 0$ pour tout n, donc $f(z) = \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}}$, donc $g(z) = 2 - \sqrt{1-4x^2}$, donc $b_0 = 1$, $b_{2n+1} = 0$ pour tout $n \geq 0$ et $b_{2n} = \frac{1}{2n-1}\binom{2n}{n}$ pour tout $n \geq 1$. On retrouve au passage une expression proche de celle des nombres de Catalan, ce qui n'est pas un hasard.