

Leçon 210 : Séries entières d'une variable réelle ou complexe. Rayon de convergence. Propriétés de la somme. Exemples

Dans toute la leçon, \mathbb{K} désigne \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

L'algèbre des séries entières

Définition : On appelle **série entière** de variable réelle (respectivement, complexe) toute série de fonctions de la forme $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, où x est une variable réelle (respectivement, complexe) et $(a_n)_{n \geq 0}$ une suite à valeurs réelles (respectivement, complexe).

Définition : On définit les trois opérations suivantes sur les séries entières :

- ▷ Somme : $(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n) + (\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n) = \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) x^n$.
- ▷ Multiplication par un scalaire : $\lambda (\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n) = \sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda a_n) x^n$.
- ▷ Produit de Cauchy : $(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n) (\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$, où $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$.

Ces définitions sont purement algébriques, et ne préjugent pas de la convergence de ces séries.

Théorème : Muni de ces trois opérations, l'ensemble des séries entières est une \mathbb{K} -algèbre commutative.

Rayon de convergence

Définition : Soit $(a_n)_{n \geq 0}$ une suite à valeurs dans \mathbb{K} . On pose

$$R := \sup\{r \geq 0, (a_n r^n)_{n \geq 0} \text{ est bornée}\} \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$$

Alors R est appelé le **rayon de convergence** de la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, et $B(0, R)$ le **disque de convergence** de cette série entière.

En cas d'ambiguïté, on notera $R(a)$ le rayon de convergence de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

Proposition : Soit $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R . Soit $x \in \mathbb{K}$.

- ▷ Si $|x| < R$ alors $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ converge absolument.
- ▷ Si $|x| > R$ alors $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ diverge.

Proposition : Soit $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R . Soit $x \in \mathbb{K}$.

- ▷ Si $(a_n)_{n \geq 0}$ est bornée alors $R \geq 1$.
- ▷ Si $(a_n)_{n \geq 0}$ ne converge pas vers 0 alors $R \leq 1$.

Exemple : Le rayon de convergence de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \cos(n)x^n$ est 1.

Proposition : Soit $(a_n)_{n \geq 0}$ une suite et $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors les rayons de convergence des séries $\sum_{n=1}^{+\infty} n^\alpha a_n x^n$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$ sont égaux.

Proposition (Règle de d'Alembert) : Soit $(a_n)_{n \geq 0}$ une suite ne s'annulant pas. Si la limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| =: \lambda \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ existe, alors le rayon de convergence de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$ est $R = \frac{1}{\lambda}$, avec les conventions $1/0 = +\infty$ et $1/(+\infty) = 0$.

Proposition (Règle de Cauchy) : Soit $(a_n)_{n \geq 0}$ une suite. Si la limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} =: \lambda \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ existe, alors le rayon de convergence de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$ est $R = \frac{1}{\lambda}$, avec les conventions $1/0 = +\infty$ et $1/(+\infty) = 0$.

Exemple : Le rayon de convergence de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ est $+\infty$; le rayon de convergence de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^n x^n$ est 2.

Proposition : Soient $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n x^n$ deux séries entières, et c leur produit de Cauchy. Alors :

- ▷ $R(a + b) \geq \min\{R(a), R(b)\}$;
- ▷ $R(a + b) = \min\{R(a), R(b)\}$ si $R(a) \neq R(b)$;
- ▷ $R(c) \geq \min\{R(a), R(b)\}$.

Propriétés de la somme

Dans ce qui suit, on fixe une série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ de rayon de convergence¹ R . Pour tout $x \in B(0, R)$, on pose $f(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

Proposition : Pour tout $r < R$, la série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ converge normalement sur $B(0, r)$.

Conséquence : La fonction f est continue sur $B(0, R)$.

Proposition : La fonction f est dérivable sur $B(0, R)$, et $f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)a_{n+1}x^n$ pour tout $x \in B(0, R)$. La série dérivée a le même rayon de convergence.

Conséquence : La fonction f est C^∞ sur $B(0, R)$, et $f^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+k)!}{n!} a_{n+k} x^n$ pour tout $x \in B(0, R)$.

Proposition : La série $F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_{n-1}}{n} x^n$ a le même rayon de convergence, est dérivable sur $B(0, R)$, et $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in B(0, R)$.

Comportement au bord du disque de convergence

La convergence de la série en un point du bord du disque de convergence se fait par exemple à l'aide du théorème d'Abel.

Théorème : Soit $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R \in \mathbb{R}_+^*$. Supposons que la suite $(a_n R^{-n})_{n \geq 0}$ soit positive et décroissante. Alors la série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ converge pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| = R$ et $z \neq R$.

Théorème (Critère d'Abel radial) : Soit $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R < +\infty$. Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $|z_0| = R$. Si la série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z_0^n$ converge, alors elle converge uniformément sur le segment $[0, z_0]$. En particulier, cette série est continue sur le segment $[0, z_0]$.

Exemple : Calcul des séries $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

Exemple : La série $\sum_{n=0}^{+\infty} z^{2^n}$ n'admet pas de prolongement continu à un ouvert connexe strictement plus grand que $B(0, 1)$ [Sk].

Applications

De nombreuses applications sont présentes dans [FGN2] et [MVT]. **Attention :** De nombreuses interactions avec d'autres domaines des mathématiques; penser à préparer des développements commun à d'autres leçons.

0.1 Probabilités : Fonctions génératrices

Définition : Soit X une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{N} . Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $p_n := \mathbb{P}(X = n)$. On appelle **fonction génératrice** de X l'application G définie par $G(t) := \sum_{n=0}^{+\infty} p_n t^n$.

Théorème : X admet une espérance si et seulement si G' a une limite à gauche en 1. Dans ce cas, $\mathbb{E}(X) = G'(1)$.

X admet une variance si et seulement si $G^{(2)}$ a une limite à gauche en 1. Dans ce cas, $G^{(2)}(1) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)$.

Application : Calcul de l'espérance et de la variance d'une loi de Bernoulli, d'une loi de Poisson [ESC] ou [GK, Chapitre 9].

1. Attention : dans ce qui suit, le rayon de convergence peut être nul. Cela n'invalide pas les énoncés, mais ce cas particulier doit être vérifié séparément.

0.2 Analyse : Résolution d'équations différentielles

On suppose qu'une solution développable en série entière d'une équation différentielle existe, puis on montre que son rayon de convergence est strictement positif.

Exemple : Trouver une solution développable en série entière de l'équation différentielle $2xy' + y = \frac{1}{1-x}$. Déterminer une formule explicite de cette solution.

Exemple : Soit $J_0(x) := \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x \sin(t)) dt$. Montrer que J_0 est solution de l'équation différentielle $xy'' + y' + xy = 0$. Déterminer son développement en série entière [MVT, E-4].

0.3 Combinatoire : Calcul de suites

Exemple : Calcul des nombres de Catalan [FGN].

Exemple : Calcul des nombres de partitions, des nombres d'arbres [MVT, E-6 et E-7].

Références

[AF] : *Cours de mathématiques - 3. Compléments d'analyse*. Arnaudière, Fraysse.

[Dan] : *Mathématiques pour l'agrégation - Analyse et probabilités*. Dantzer.

[Esc] : *Probabilités et statistiques*. Escoffier.

[FGN] : *Exercices de mathématiques des oraux de l'École polytechnique et des Ecoles normales supérieures. Algèbre-Analyse*. Francinou, Gianella, Nicolas.

[FGN2] : *Exercices de mathématiques des oraux de l'École polytechnique et des Ecoles normales supérieures. Algèbre-Analyse*. Francinou, Gianella, Nicolas.

[GK] : *De l'intégration aux probabilités*. Garet, Kurtzmann.

[MVT] : *Suites et séries de fonctions*. Moisan, Vernotte, Tosel.

[Sk] : Skandalis

La présentation, en l'absence d'autre mention, est tirée de [Dan]; [AF] fournit une présentation complète, quoique moins accessible. Pour les développements, voir en particulier [FGN2] et [MVT]. Les textes [Esc] et [GK] permettent éventuellement de compléter les applications aux probabilités.

Autres développements possibles (liste non exhaustive) :

- ▷ Critère d'analyticité et principe des zéros isolés [MVT, p.88].
- ▷ Séries de Taylor ayant un rayon de convergence nul [MVT, p.87].
- ▷ Application aux équations différentielles [MVT, p.91].
- ▷ Identités combinatoires [MVT, p.94].