Intégration : exercices

Exercice 1. [Moisan–Chanet–Delmas–Tosel, p.187]

1. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ continue par morceaux. On pose, pour tout $\xi \in \mathbb{R}$,

$$I(\xi) := \int_a^b e^{i\xi t} f(t)dt.$$

Montrer que $\lim_{\xi \to +\infty} I(\xi) = 0$. En déduire les limites de

$$J(\xi) := \int_a^b \cos(\xi t) f(t)dt, \quad K(\xi) := \int_a^b \sin(\xi t) f(t)dt.$$

On montrera d'abord le résultat pour les fonctions en escalier.

2. Soient $T > 0$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et T-périodique. Montrer en généralisant le raisonnement précédent que

$$\lim_{\xi \to +\infty} \int_a^b f(t) g(\xi t) dt = \int_a^b f(t)dt \cdot \frac{1}{T} \int_0^T g(t)dt.$$

Exercice 2. [Moisan–Chanet–Delmas–Tosel, p.208]
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue et positive. Montrer que

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\int_a^b f(t)^n dt \right)^{\frac{1}{n}} = \max_{[a,b]} f.$$

Exercice 3. [Moisan–Chanet–Delmas–Tosel, p.204]

1. Calculer, pour tout $n \geq 1$, l'intégrale

$$\int_0^\pi t(\pi - t)\cos(2nt)dt.$$

2. En déduire que, pour tout $N \geq 1$,

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} = \int_0^\pi \varphi(t) \sin((2N+1)t)dt,$$

où $\varphi \in \mathcal{C}^0([0,\pi], \mathbb{R})$.

3. Conclure à l'aide du lemme de Riemann-Lebesgue.

Exercice 4. [Moisan–Chanet–Delmas–Tosel, p.140]
Soient p, q deux entiers naturels non nuls. On pose

$$P_n := \frac{1}{n!} X^n (p - qX)^n.$$

1. Montrer que P_n et toutes ses dérivées prennent des valeurs entières en 0 et en p/q.

2. Montrer que $I_n := \int_0^{p/q} P_n(t)\sin(t)dt$ converge vers 0.
3. Supposons que $\pi = p/q$. Montrer à l'aide d'intégrations par parties que I_n est un entier non nul pour tout n. Conclure.

Exercice 5. Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n+k}{n^2+k^2},\qquad \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^2(n^3+k^3)^{\frac{1}{3}}}$$

Exercice 6. [Moisan–Chanet–Delmas–Tosel, p.205]

1. Soient f une application continue par morceaux sur $[a,b]$ et g une application continue sur $\mathbb{R}$. Montrer que $g\circ f$ est continue par morceaux sur $[a,b]$. Est-ce toujours vrai si l'on suppose seulement que g est continue par morceaux ?
2. Montrer l'équivalence

$$g \text{ est convexe sur } \mathbb{R} \iff \forall f\in\mathcal{CM}([0,1]), g\left(\int_0^1 f(t)dt\right)\leq\int_0^1 g\circ f(t)dt.$$

   Retrouver directement l'inégalité de gauche quand $g=|\cdot|$ et quand g est la fonction carré.
3. *Application :* soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continue et strictement positive. En déduire que

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b \ln(f(t))dt \leq \ln\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right).$$

4. *Application :* soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continue par morceaux. En déduire que la fonction

$$p\mapsto\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b |f(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

   est croissante sur $[1,+\infty)$.