Leçon 237 : Construction de l'intégrale et lien avec les primitives

Notations : soient $a < b$ des réels. On note $\mathcal{CM}([a,b]) = \{f : [a,b] \to \mathbb{C},\ \text{continue par morceaux}\}$ et $\mathcal{E}([a,b]) = \{f : [a,b] \to \mathbb{C},\ \text{en escalier}\}$.
Pour $f \in \mathcal{E}([a,b])$, on définit l'intégrale $I(f)$ comme l'aire des rectangles (dessin).
On va étendre cette intégrale à $\mathcal{CM}([a,b])$ par densité (théorème de Heine).

Construction de l'intégrale

Théorème : $\mathcal{E}([a,b])$ est dense dans $\mathcal{CM}([a,b])$ (conséquence du théorème de Heine).

Lemme : Soit f continue par morceaux sur $[a,b]$ et $(\varphi_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions en escalier qui converge uniformément vers f. Alors la suite $(I(\varphi_n))_{n\geq 0}$ converge, et la limite ne dépend pas de la suite (φ_n).

Définition : L'intégrale sur $[a,b]$ de $f \in \mathcal{CM}([a,b])$ est la limite d'une telle suite $(I(\varphi_n))$. On la note $\int_a^b f(t)dt$, ou $\int_a^b f$ s'il n'y a pas de confusion possible.

Propriétés : L'intégrale est linéaire, vérifie la relation de Chasles. L'intégrale d'une fonction positive est positive, et $|\int_a^b f(t)dt| \leq \int_a^b |f(t)|dt$. En particulier, par linéarité, $\int_a^b f = \int_a^b Re(f) + i\int_a^b Im(f)$.
Toutes ces propriétés se démontrent d'abord sur $\mathcal{E}([a,b])$, puis s'étendent à $\mathcal{CM}([a,b])$.

Propriété : on munit le plan d'un repère orthonormé. Soit $f \in \mathcal{CM}([a,b])$ positive. Alors l'aire du domaine $\{(x,y) :\ a \leq x \leq b,\ 0 \leq y \leq f(x)\}$ vaut $\int_a^b f$. Plus généralement, pour $f, g \in \mathcal{CM}([a,b])$ réelle, l'aire du domaine $\{(x,y) :\ a \leq x \leq b,\ \min\{f(x),g(x)\} \leq y \leq \max\{f(x),g(x)\}\}$ vaut $\int_a^b |f-g|$.

Remarque : On prolonge la relation de Chasles par $\int_a^a f = 0$ et $\int_b^a f = -\int_a^b f$.

Somme de Riemann

Définition : Soient $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ bornée, $\sigma = (t_0, t_1, \cdots, t_k)$ une subdivision de $[a,b]$ et $\theta = (\theta_1, \cdots, \theta_k)$ tels que $\theta_i \in [t_{i-1}, t_i]$. On appelle **somme de Riemann** de f relative à (σ, θ) la quantité

$$S(f,\sigma,\theta) := \sum_{i=1}^{k} (t_i - t_{i-1}) f(\theta_i)\ ;$$

c'est l'intégrale d'une fonction en escalier (dessin). On définit le **pas** de σ par $p(\sigma) := \max_{1\leq i\leq k}(t_i - t_{i-1})$.

Propriété : soient $f \in \mathcal{CM}([a,b])$, (σ_n) une suite de subdivisions telles que $\lim_{n\to+\infty} p(\sigma_n) = 0$ et (θ_n) une suite de points marqués. Alors

$$\lim_{n\to+\infty} S(f,\sigma_n,\theta_n) = \int_a^b f(t)dt.$$

Corollaire : on choisit $\sigma_n = (a + i\frac{b-a}{n})_{0\leq i\leq n}$ et $\theta_n = (a + (i-1)\frac{b-a}{n})_{1\leq i\leq n}$. Pour toute fonction $f \in \mathcal{CM}([a,b])$,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(t)dt.$$

Application : méthode des trapèzes et analyse d'erreur si f est $\mathcal{C}^1$ ou $\mathcal{C}^2$.

Application : si $f \in \mathcal{C}^1([a,b])$, alors

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(k/n) = -\frac{1}{2n}[f(0)-f(1)] + o(1/n).$$

Primitives

Théorème : soit $f \in \mathcal{CM}([a,b])$. Soit F définie sur $[a,b]$ par $F(t) = \int_a^t f$. Alors F est continue ; si f est positive, alors F est croissante ; si f est continue et t, alors F est dérivable en t et $F't) = f(t)$. On appelle F une **primitive** de f.

Conséquence : si $f \in \mathcal{C}^1([a,b])$, alors $\int_a^b f'(t)dt = f(b) - f(a)$.

On peut donc calculer l'aire sous la courbe de certaines fonctions, ou à l'inverse, calculer des primitives à l'aide d'aires.

Proposition : intégration par partie sur un segment.

Proposition : changement de variables sur un segment.

Application : Lemme de Riemman-Lebesgue : pour toute fonction $f \in \mathcal{CM}([a,b])$,

$$\lim_{\xi\to+\infty}\int_a^b e^{i\xi t} f(t)dt = 0.$$

Application :

- ▷ Calcul de $\int_0^\pi t(\pi - t)\cos(2nt)dt = -\frac{\pi}{2n^2}$ pour tout $n \geq 1$.
- ▷ En déduire que $\sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} + \int_0^\pi \varphi(t)\sin((2N+1)t)dt$, où φ est une fonction continue sur $[0,\pi]$.
- ▷ Conclure à l'aide du lemme de Riemann-Lebesgue.

Références

[CA] : *Analyse pour le CAPES et l'agrégation interne.* Caby, Auliac

[Mo] : *Manuel de mathématique – Mathématiques supérieures – Analyse.* Moisan, Chanet, Delmas, Tosel.

[L1] : *Mathématiques L1.* Marco, Lazzarini

Les énoncés sont tirés de [CA] (pp. 304–315), les applications de [Mo] (pp. 187–204). Voir aussi [L1] (pp. 763–789) pour des commentaires additionnels.