Équations différentielles. Notes de cours.

Le but de ce document est de revenir sur le théorème de Cauchy-Lipschitz [1] affirmant l'existence et l'unicité de solutions à certaines équations différentielles.

Théorème 0.1 (Théorème de Cauchy-Lipschitz $\mathcal{C}^1$, version scalaire)**.**
*Soit $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction **de classe** $\mathcal{C}^1$. Soient $t_0 \in \mathbb{R}$ et $y_0 \in \mathbb{R}$. Alors **il existe une unique** solution f de classe $\mathcal{C}^1$ maximale de l'équation différentielle*

$$\left\{ \begin{array}{lcl} y' & = & F(t, y(t)) \\ y(t_0) & = & y_0 \end{array} \right. .$$

Cette solution est de plus de classe $\mathcal{C}^2$.

Le théorème de Cauchy-Lipschitz, version scalaire

0.1 Formalisme

Une équation différentielle ordinaire, dans ce formalisme, est la donnée d'une condition initiale (la valeur y_0 au paramètre t_0), et d'une relation entre le paramètre t, la valeur de la fonction y, et la valeur de la dérivée y'. Cela inclus la plupart des équations différentielles du premier ordre. Par exemple, l'équation différentielle

$$\left\{ \begin{array}{lcl} y' - 2y^2 & = & t \\ y(0) & = & 1 \end{array} \right. .$$

correspond aux choix $F(t, y) = t + 2y^2$, ainsi que $t_0 = 0$ et $y_0 = 1$.

En particulier, les équations linéaires à coefficients constants rentrent dans ce cadre.

Il se peut que la fonction F soit seulement définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Cela n'affecte pas les conclusions du théorème.

0.2 Notion de solution maximale

Une difficulté est la notion de solution maximale. Si une solution existe, celle-ci n'est pas forcément définie en tout temps. Par exemple, l'équation différentielle

$$\left\{ \begin{array}{lcl} y' & = & 1 + y^2 \\ y(0) & = & 0 \end{array} \right.$$

admet pour solution la fonction tangente, qui est définie sur l'intervalle $(-\pi/2, \pi/2)$, mais que l'on ne peut pas prolonger par continuité en tout temps. Une solution est donc en fait la donnée :

- ▷ d'un intervalle ouvert I voisinage de 0 ;
- ▷ d'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$, solution de l'équation différentielle.

L'unique solution maximale (I, f) à une équation différentielle vérifie les deux propriétés suivantes :

- ▷ l'intervalle I est le plus grand possible : si l'on se donne une solution $g : J \to \mathbb{R}$, où J est un intervalle, alors $J \subset I$.

1. Ou théorème de Cauchy, ou de Picard, ou de Picard-Lidelöf...

- ▷ la solution maximale est unique au sens où si $g : J \to \mathbb{R}$, où J est un intervalle, alors $g = f_{|J}$: les seules solutions de l'équation sur un intervalle sont les restrictions de la solution maximale à des sous-intervalles.

Remarque 0.2.
Il est important ici de travailler avec des ***intervalles*** *(connexes !). Le résultat est faux si on enlève cette condition. Par exemple, l'équation différentielle $y' = 1 + y^2$ avec condition initiale $y(0) = 0$ admet une unique solution maximale, définie sur l'intervalle $(-\pi/2, \pi/2)$, la fonction tangente. Mais on peut étendre cette solution, et ce avec une infinité de degrés de libertés, par exemple en posant $f(t) = \tan(t - 50,42)$ pour $t \in (50,42 - \pi/2, 50,42 + \pi/2)$. Ce n'est pas une contradiction avec le théorème de Cauchy-Lipschitz car $(50,42 - \pi/2, 50,42 + \pi/2) \cup (-\pi/2, \pi/2)$ n'est pas un intervalle.*

Remarque 0.3.
On se place dans les conditions du théorème de Cauchy-Lipschitz. Supposons que la solution maximale f est définie sur un intervalle bornée (a, b). Alors f tend vers $+\infty$ ou $-\infty$ en a comme en b.

Le raisonnement est grossièrement le suivant : à chaque fois que f rencontre l'intervalle $[-M, M]$ avant le temps a, elle reste un temps borné inférieurement ε dans l'intervalle $[-M - 1, M + 1]$. Vu que f n'est définie que jusqu'au temps a, elle ne passe qu'au plus a/ε fois dans l'intervalle $[-M, M]$. Ainsi, f quitte tout intervalle compact de $\mathbb{R}$; ses valeurs d'adhérence sont donc dans $\pm\infty$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, f ne peut pas avoir à la fois $+\infty$ et $-\infty$ comme valeurs d'adhérences, donc f tend vers une de ces deux valeurs.

0.3 Une généralisation

Ici, nous avons par simplicité énoncé le théorème pour des fonctions F de classe $\mathcal{C}^1$. Un critère plus général existe, celui de *fonction uniformément localement lipschitzienne*[2]. Une fonction F satisfait cette condition si F est continue et si, pour tous T, $R > 0$, il existe $M \geq 0$ tel que, pour tous $t \in [-T, T]$ et tous x, $y \in [-R, R]$,

$$|F(t, x) - F(t, y)| \leq M|x - y|.$$

Cela permet d'inclure des équations du type $y'(t) = t + |y(t)|$ ou $y'(t) = g(t)y(t)$ avec g continue (voir la partie suivante).

0.4 Cas des équations linéaires

Une équation différentielle du premier ordre est dite **linéaire** s'il existe deux fonctions **continues** a, $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que

$$\begin{cases} y'(t) &= a(t)y(t) + b(t) \\ y(t_0) &= y_0 \end{cases}.$$

Cela revient à prendre la fonction $F(t, y) = a(t)y + b(t)$. Celle-ci satisfait les hypothèses de la forme générale du théorème de Cauchy Lipschitz. Par conséquent, **une équation différentielle linéaire du premier ordre sur $\mathbb{R}$ admet une unique solution à condition initiale fixée**.

On peut de plus vérifier, à l'aide d'arguments abstraits ou de la forme explicite ci-dessous, que **les solutions sont globales**, c'est-à-dire définies sur $\mathbb{R}$ tout entier. Enfin :

- ▷ Les solutions de l'équation différentielle homogène $y'(t) = a(t)y(t)$ forment une droite vectorielle S_0 dans $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$: la somme de deux solutions, ou le produit d'une solution par un scalaire, sont encore des solutions.

2. Ou une version semblable de ce vocabulaire : localement lipschitzienne par rapport à la seconde variable de manière uniforme en la première, semi-lipschitzienne à paramètre...

- ▷ Les solutions de l'équation différentielle $y'(t) = a(t)y(t)+b(t)$ forment une droite **affine** S dans $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, de direction S_0 : la différence entre deux solutions est une solution de l'équation homogène, et réciproquement, la somme d'une solution et d'une solution de l'équation homogène est encore une solution.

Ces solutions peuvent s'expliciter. Soit $a \in \mathbb{R}$. L'équation différentielle

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y'(t) & = & ay(t) \\ y(t_0) & = & y_0 \end{array} \right.$$

a pour unique solution maximale la fonction $f(t) = y_0 e^{a(t-t_0)}$, définie sur $\mathbb{R}$. Plus généralement, étant donnée $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue, l'équation différentielle

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y'(t) & = & a(t)y(t) \\ y(t_0) & = & y_0 \end{array} \right.$$

a pour unique solution maximale la fonction $f(t) = y_0 e^{\int_{t_0}^t a(s)\, \mathrm{d}s}$, définie sur $\mathbb{R}$.

Si l'équation a un second membre $b(t)$, alors les solutions de l'équation homogène s'obtiennent par la technique ci-dessus, tandis qu'une solution particulière peut s'obtenir par la méthode de variation de la constante.

La dimension supérieure

Le théorème de Cauchy-Lipschitz reste vrai pour des fonctions à valeurs vectorielles.

Théorème 0.4 (Théorème de Cauchy-Lipschitz $\mathcal{C}^1$)**.**
Soit $n \geq 1$. Soit $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Soient $t_0 \in \mathbb{R}$ et $y_0 \in \mathbb{R}^n$. Alors il existe une unique solution f de classe $\mathcal{C}^1$ maximale de l'équation différentielle

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y' & = & F(t, y(t)) \\ y(t_0) & = & y_0 \end{array} \right. .$$

Cette solution est de plus de classe $\mathcal{C}^2$.

Là encore, un peut remplacer l'hypothèse *F de classe $\mathcal{C}^1$* par une hypothèse plus faible du type *uniformément localement lipschitzien.*

0.5 Quelques exemples explicites

Soit $A \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Alors l'équation différentielle

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y'(t) & = & Ay(t) \\ y(t_0) & = & y_0 \end{array} \right.$$

a pour unique solution maximale la fonction $f(t) = e^{(t-t_0)A} y_0$, définie sur $\mathbb{R}$.

Attention : Contrairement au cas scalaire, les équations linéaires à coefficients variables n'admettent en général pas de solution simple. La fonction $f(t) = y_0 e^{\int_{t_0}^t A(s)\, \mathrm{d}s}$ n'est en général pas solution de l'équation différentielle $y'(t) = A(t)y(t)$. Le problème est que, pour des matrices génériques, $e^{A+B} \neq e^A e^B$, car la multiplication de matrices n'est pas commutative. Nous renvoyons le lecteur à la particulièrement désagréable formule de Baker-Campbell-Hausdorff.

Ceci dit, en général :

- ▷ Les solutions de l'équation homogène $y'(t) = A(t)y(t)$ sont définies globalement, et forment un sous-espace vectoriel S_0 de dimension n de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$. Une solution est spécifiée par n'importe quelle valeur particulière $y(t_0)$.

- ▷ Les solutions de l'équation $y'(t) = A(t)y(t) + b(t)$ sont définies globalement, et forment un sous-espace affine S de dimension n de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ et de direction S_0.

Exemple : Donnons un exemple explicite pour lequel la formule $y_0 e^{\int_{t_0}^t A(s)\,\mathrm{d}s}$ ne convient pas. Considérons l'équation différentielle définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$\begin{cases} u'(t) &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1/t \end{pmatrix} u(t) \\ u(1) &= (x_1, y_1) \end{cases}.$$

On calcule directement $y(t) = y_1 t$ et, en utilisant la méthode de variation de la constante, $x(t) = x_1 e^{t-1} + y_1(2e^{t-1} - 1 - t)$.
De plus, on calcule (plus douloureusement)

$$\int_1^t \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1/s \end{pmatrix} \mathrm{d}s = \begin{pmatrix} (t-1) & (t-1) \\ 0 & \ln(t) \end{pmatrix}, \quad e^{\int_1^t \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1/s \end{pmatrix} \mathrm{d}s} = \begin{pmatrix} e^{t-1} & \frac{(t-1)(e^{t-1}-t)}{t-1-\ln(t)} \\ 0 & t \end{pmatrix},$$

ce qui donne bien $y(t) = y_1 t$, mais donne la solution erronée $x(t) = x_1 e^{t-1} + y_1 \frac{(t-1)(e^{t-1}-t)}{t-1-\ln(t)}$.

Équations différentielles d'ordre supérieur

Grâce au théorème de Cauchy-Lipschitz en dimension quelconque, on peut aussi traiter des équations différentielles d'ordre plus grand que 1. Considérons par exemple l'équation différentielle

$$y'' = -y.$$

On introduit une nouvelle variable v, qui est formellement la dérivée de y :

$$y' = v.$$

Alors $v' = y'' = -y$. L'équation différentielle initiale se réécrit donc

$$\begin{pmatrix} y \\ v \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} v \\ -y \end{pmatrix}.$$

Cette équation a une unique solution étant donnés $y(0)$ et $v(0) = y'(0)$.
Plus généralement, s'il existe une fonction F de classe $\mathcal{C}^1$ telle que

$$y^{(n)} = F(t, y, \dots, y^{(n-1)}),$$

alors on peut traduire l'équation différentielle d'ordre n en n équations différentielles d'ordre 1, d'où :

Théorème 0.5 (Théorème de Cauchy-Lipschitz $\mathcal{C}^1$, ordre supérieur)**.**
Soit $n \geq 1$. Soit $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Soient $t_0 \in \mathbb{R}$ et $y_0 \in \mathbb{R}^n$. Alors il existe une unique solution f de classe $\mathcal{C}^n$ maximale de l'équation différentielle

$$\begin{cases} y^{(n)} &= F(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n-1)}(t)) \\ y(t_0) &= y_0 \\ & \vdots \\ y^{(n-1)}(t_0) &= y_{n-1} \end{cases}.$$

Cette solution est de plus de classe $\mathcal{C}^{n+1}$.

On peut de même résoudre des équations différentielles d'ordre m sur $\mathbb{R}^n$.

0.6 Résolution d'une équation linéaire

Continuons la résolution de l'équation $y'' = -y$. D'après le théorème ci-dessus, étant donnés y_0 et y_1, pour tous $(y_0, y_1) \in \mathbb{R}^2$, il existe une unique solution de l'équation

$$\begin{cases} y'' &= -y \\ y(0) &= y_0 \\ y'(0) &= y_1 \end{cases} .$$

Autrement dit, l'espace des solutions de l'équation différentielle $y'' = -y$ forme un plan ; plus généralement, l'espace des solutions d'une équation différentielle d'ordre n sur $\mathbb{R}$ est de dimension n.

La réduction ci-dessus permet de calculer explicitement les solutions d'équations linéaires d'ordre supérieur. Posons

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad U := \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$$

Alors U est solution de l'équation différentielle $U' = AU$. Cette équation différentielle étant linéaire, elle a pour solution maximale $U(t) = e^{tA}U(0)$. Or A est antisymétrique, donc e^{tA} est une matrice de rotation. On peut calculer explicitement :

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix},$$

et donc $y(t) = y(0)\cos(t) + v(0)\sin(t) = y(0)\cos(t) + y'(0)\sin(t)$.

Exercice : Utiliser cette méthode pour déterminer toutes les solutions de l'équation différentielle $y'' = 2y' - y$.

Remarque 0.6.
Le plus souvent, les approches usuelles sont souvent nettement plus efficaces pour calculer explicitement les solutions d'une équation différentielle linéaire d'ordre supérieur. Cependant, l'approche matricielle permet de faire le lien entre la présence de termes polynomiaux quand l'équation caractéristique de l'équation différentielle a une racine multiple, et la présence de blocs de Jordan non triviaux dans la matrice A. De plus, elle permet de justifier rigoureusement l'existence et l'unicité des solutions d'une équation différentielle, même non linéaire.

Remarque 0.7.
Les commentaires faits sur les équations linéaires dans $\mathbb{R}^n$ restent toujours valides pour les équations différentielles linéaires d'ordre n ; les solutions de l'équation $y^{(n)}(t) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k(t)y^{(k)}(t) + b(t)$ forment un espace affine de dimension n de $\mathcal{C}^n(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, dont la direction est l'ensemble des solutions de l'équation homogène. Toutes les solutions sont alors définies globalement.

Enfin, nous avons discuté plus tôt de la difficulté de résoudre des équations différentielles linéaires à coefficients variables en dimension supérieure ; la difficulté reste la même pour des équations différentielles linéaires à coefficients variables d'ordre supérieur. Il n'est en général pas possible d'exprimer les solutions de façon élémentaire à partir des fonctions a_k et de leurs primitives, et ce malgré quelques astuces de calcul (wronskien pour des équations d'ordre 2).

0.7 Conditions initiales, conditions au bord

La solution y d'une équation différentielle d'ordre n satisfaisant les conditions du théorème de Cauchy est caractérisée par les valeurs $y(t_0)$, ..., $y^{(n-1)}(t_0)$ en un point. On peut parfois rencontrer des informations différentes ; par exemple, étant donnés $y(t_0)$, ..., $y(t_{n-1})$, l'équation différentielle a-t-elle une unique solution ?

Ce problème peut être délicat à résoudre. Par exemple, pour l'équation $y'' = -y$, étant donnés y_0 et y_1 :

- ▷ il existe une unique solution y telle que $y(0) = y_0$ et $y(\pi/2) = y_1$.
- ▷ si $y_0 = -y_1$, alors l'équation a une infinité de solutions telles que $y(0) = y_0$ et $y(\pi) = y_1$; si cette condition n'est pas vérifiée, alors il n'y a aucune solution.

Ces énoncés se déduisent du fait que l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y'' = -y$ est l'ensemble $\{A\cos(t) + B\sin(t) \ : \ (A, B) \in \mathbb{R}^2\}$.

Contre-exemples

Dans l'énoncé du théorème de Cauchy-Lipschitz, il faut que l'équation différentielle puisse être mise sous la forme $y' = F(t, y)$. Ce n'est pas toujours le cas ; en particulier, il arrive de rencontrer des équations du premier ordre de la forme

$$a(t)y'(t) + b(t)y(t) = c(t),$$

qui ne peuvent pas se mettre sous cette forme si a s'annule. Un exemple classique est donné par l'équation de Bessel

$$\begin{cases} ty'' + y' + ty & = & 0 \\ y(0) & = & 1 \end{cases},$$

qui admet une unique solution maximale, alors qu'il s'agit d'une équation différentielle d'ordre 2. On peut aussi concevoir ainsi des équations différentielles d'ordre 1 admettant une infinité de solutions, malgré la donnée d'une condition initiale.

Une autre hypothèse que l'on peut tenter d'affaiblir concerne la régularité de F. Comme nous avons déjà vu, une propriété du type *uniformément localement lipschitzienne* suffit. Des problèmes peuvent apparaître si on travaille avec des fonctions non lipschitziennes, par exemple

$$\begin{cases} y' & = & \sqrt{|y|} \\ y(0) & = & 0 \end{cases}.$$

Cette équation admet une infinité de solutions maximales, de la forme

$$\begin{cases} y(t) & = & 0 & \forall t \leq t_0 \\ y(t) & = & \frac{(t-t_0)^2}{4} & \forall t > t_0 \end{cases}.$$

Ce type d'exemple n'est pas complètement artificiel, et peut apparaître très occasionnellement en physique (dynamique d'une bille roulant sur la crête d'un demi-cylindre, vidange d'une cuve remplie d'eau). Signalons enfin une très belle construction géométrique d'un tel contre-exemple, utilisant des cercles osculateurs, mentionnée dans le *Mathematical omnibus*, de Fuchs et Tabachnikov, Proposition 10.3.

Exercice : Soit $y_0 > 0$. Résoudre l'équation différentielle

$$\begin{cases} y' & = & \sqrt{y} \\ y(0) & = & y_0 \end{cases}$$

à l'aide de la méthode de séparation de variables.