Fonctions de plusieurs variables réelles : Exercices

Exercice 1.

1. Soit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$. Dérivez, quand c'est possible, les fonctions $x \mapsto \langle x, x \rangle$ et $x \mapsto \|x\|$.
2. Calculez la différentielle de l'application $f : X \to X^2$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
3. Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Définissons $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par

$$g(x, y) := \begin{cases} \frac{f(x)-f(y)}{x-y} & \text{si} \quad x \neq y \\ f'(x) & \text{si} \quad x = y \end{cases}.$$

Montrez que $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$.

Exercice 2. Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Définissons

$$\varphi := \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \to \quad \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto \quad (f(x, y), 2xy) \end{cases}.$$

Déterminez une condition nécessaire et suffisante sur f pour que la différentielle de φ soit une similitude.

Exercice 3. Soit $\alpha \geq 0$. Étudiez la continuité, la différentiabilité, l'existence et la continuité des dérivées partielles en $(0, 0)$ de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(0, 0) = 0 \quad \text{et} \quad f(x, y) = (x^2 + y^2)^\alpha \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) \quad \forall (x, y) \neq (0, 0).$$

Exercice 4. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(0, 0) = 0 \quad \text{et} \quad f(x, y) = \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} \quad \forall (x, y) \neq (0, 0).$$

1. Montrez que f est de classe $\mathcal{C}^1$.
2. f est-elle différentiable 2 fois sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 5. Soient $a \in \mathbb{R}^n$ et U un voisinage ouvert de a. Soit $f \in \mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$. Soit $D_a f$ la différentielle en a de f. Soit $Q(a)$ la forme quadratique dont la matrice dans la base canonique est de coefficients $A_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)$, pour tous $1 \leq i, j \leq n$.

1. Soit $u \in \mathbb{R}^n$. Écrivez la formule de Taylor avec reste intégral en 0 de $g : t \mapsto f(a + tu)$.
2. Déduisez-en qu'il existe une fonction ε définie sur un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^n$, telle que $\lim_0 \varepsilon = 0$ et, pour tout u suffisamment petit,

$$f(a + u) = f(a) + D_a f(u) + \frac{1}{2} Q(a)(u) + \|u\|^2 \varepsilon(u).$$

Exercice 6.

1. Étudiez la nature des points critiques (dégénérés ou non, extrema locaux ou non...) des trois fonctions suivantes :

$$f_1(x,y) = xy + x^4 - y^4 \ ; \quad f_1(x,y) = x^2 - y^3 \ ; \quad f_1(x,y) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2.$$

2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x,y) = (1-x)(1-y)(x+y-1)$. Déterminez les points critiques de f. Parmi ces points, y a-t-il des extrema locaux ? Sont-ils stricts ? La fonction f admet-elle un minimum ou un maximum global sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 7. On munit $E = \mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique. Soit $f : E^n \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(v_1, \dots, v_n) = \det(v_1, \dots, v_n)^2$.

1. Soient r_1, ..., $r_n > 0$. Soit $S := \{(v_1, \dots, v_n) \in E^n \ : \ \|v_1\| = r_1, \dots, \|v_n\| = r_n\}$. Montrez que $f_{|S}$ admet un maximum.
2. Soit $(v_1, \dots, v_n) \in S$ un point maximisant $f_{|S}$. Montrez que $(v_1, \dots, v_n)$ est une base orthogonale de E.
3. Déduisez-en que, pour tous v_1, ..., $v_n \in E$,

$$|\det(v_1, \dots, v_n)| \leq \|v_1\| \dots \|v_n\|.$$

Exercice 8.

1. Intégrez les équations aux dérivées partielles suivantes à l'aide des changements de variables entre parenthèses.

$$\begin{array}{ll} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \left(x = \frac{u+v}{2}, \ y = \frac{u-v}{2}\right) \\ x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0 & (u = x, \ v = y/x) \\ x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & (u = y/x, \ v = xy) \end{array}$$

2. Soit $\varphi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Pour chacune des équations aux dérivées partielles ci-dessus, montrez qu'il existe une unique solution $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ telle que $f(x,0) = \varphi(x)$ et $\partial_y f(x,0) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 9. Déterminez les fonctions $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, différentiables 2 fois, qui ne dépendent que de $r = \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2}$, et dont le laplacien $\Delta(f) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2}$ est identiquement nul.

Exercice 10. Montrez que l'intégrale $\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$ converge. En passant en coordonnées polaires, calculez sa valeur, et déduisez-en la valeur de l'intégrale $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} \, \mathrm{d}x$.

Exercice 11. Calculez :

1. $\iint_{\mathcal{R}} xy(3x+y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$ sur le rectangle $\mathcal{R} = [0;1] \times [-1;2]$;
2. $\iint_{\mathcal{D}} (x^2+y^2) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$ sur le domaine $\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 \leq y \leq 4 - x^2\}$;
3. $\iint_{\mathcal{D}} (x^2+y^2) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$ sur le disque délimité par le cercle passant par l'origine et de centre $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$.