Mémoire de Master:

M2 Mathématiques de l'aléatoire

Finalité Probabilités et Statistiques

Processus de Galton-Watson en environnement dynamique.

Thomas Morand

Encadré par Damien Thomine

2022

Université Paris-Saclay

Sommaire

1 Le modèle

1.1 Processus de Galton-Watson classique

Un processus de Galton-Watson est un processus stochastique permettant de décrire des dynamiques de populations. Il s'agit d'un processus à temps discret où chaque individu naît à une génération entière n, meurt au temps $n+1$ et produit un nombre aléatoire de descendants à l'instant $n+1$ qui vont vivre, mourir et se reproduire de la même manière et de façon indépendante. Dans le cas classique, la loi de reproduction qui régit le nombre de descendants d'un individu (une variable aléatoire à support dans $\mathbb{N}$) est la même pour tous les individus. Dans le cadre de ce mémoire, on considérera que la population à la génération 0 sera toujours égale à 1. Ce modèle a été introduit par Bienaymé [Bie45] en 1845 ainsi que Galton et Watson [WG75] en 1875 pour décrire l'évolution des patronymes dans une population.

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité. Soit $\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ une loi de reproduction.

Le processus de Galton-Watson associée à la loi μ est la suite de variables aléatoires $(Z_n, n \in \mathbb{N})$ définie par récurrence par:

$$\begin{aligned} Z_0 &= 1 \text{ p.s.} \\ Z_{n+1} &= \sum_{i=1}^{Z_n} Y_{n,i} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

où $\{Y_{n,i}, (n,i) \in \mathbb{N}^2\}$ est une famille de variables aléatoires indépendantes tel que pour tout $(n,i) \in \mathbb{N}^2$, $Y_{n,i}$ suit la loi de μ.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, Z_n est une variable aléatoire représentant la taille de notre population à la n-ième génération.

Une des questions que l'on peut se poser est de savoir si la famille va s'éteindre. C'est à dire, la taille de notre population va-t-elle passer à 0 ?

Pour cela, nous allons introduire la fonction génératrice d'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$. C'est une fonction de [0,1] à valeurs dans [0,1] définie par :

$$\varphi_X(s) = \mathbb{E}(s^X) = \sum_{k=0}^{\infty} s^k \mathbb{P}(X = k) \text{ pour tout } s \in [0,1].$$

φ_X est analytique sur [0,1[, convexe, strictement convexe si $\mathbb{P}(X \geq 2) > 0$, $\varphi_X(0) = \mathbb{P}(X = 0)$ et $\varphi_X(1) = 1$. De plus, X admet un moment d'ordre $k \in \mathbb{N}^*$ si et seulement si la dérivée k-ième de φ_X (définie sur [0,1[) admet une limite finie en 1. Dans tous les cas, cette limite vaut : $\mathbb{E}[X(X-1)...(X-k+1)]$. En particulier, si X admet un moment d'ordre 1 alors $E(X) = \varphi'_X(1)$.

Comme la fonction génératrice de X ne dépend que de la loi de X, on peut définir la fonction génératrice d'une loi de reproduction $\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ comme la fonction génératrice d'une variable aléatoire de loi μ, on la notera φ_μ.

Soit $\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Soit $(Z_n, n \in \mathbb{N})$ le processus de Galton-Watson de loi de reproduction μ. On définit l'ensemble d'extinction comme :

$$Ext = \bigcup_{n \geq 0} \{Z_n = 0\}$$

Dans le cas où la loi de reproduction μ admet un moment d'ordre 1, on note m l'espérance de μ. Alors le Théorème suivant nous donne la probabilité d'extinction :

Théorème 1.1.1. *La probabilité d'extinction du processus* $(Z_n, n \in \mathbb{N})$, $\mathbb{P}(Ext)$ *est égale à la plus petite solution de l'équation* $\varphi_\mu(s) = s$ *pour* $s \in [0, 1]$. *En particulier, si* $m \in [0, 1]$ *et* $\mu \neq \delta_1$ *alors* $\mathbb{P}(Ext) = 1$ *et si* $m \in]1, +\infty[$ *alors* $\mathbb{P}(Ext) < 1$.

Ainsi, dans le cas où la loi de reproduction μ admet un moment d'ordre 1 et que $\mu \neq \delta_1$, on a extinction presque sûr du processus si et seulement si $m < 1$.

On a représenté le graphe de φ_μ où μ est une loi de Poisson de paramètre 0,9 sur le graphe 1 et une loi de Poisson de paramètre 1,5 sur la seconde 2. Dans ces deux cas, la loi μ admet un moment d'ordre 1. Pour une loi de Poisson, son paramètre est sa moyenne. Ainsi, comme on peut le voir dans le premier cas où la moyenne est de 0,9, on a extinction presque sûr du processus. Dans le second cas où la moyenne vaut 1,5, la probabilité d'extinction est strictement inférieure à 1.

1.2 Processus de Galton-Watson en environnement dynamique

Dans tout ce mémoire, on va considérer $(\mathbb{X}, \mathcal{B}(\mathbb{X}), T)$ un système dynamique mesurable à temps discret avec :

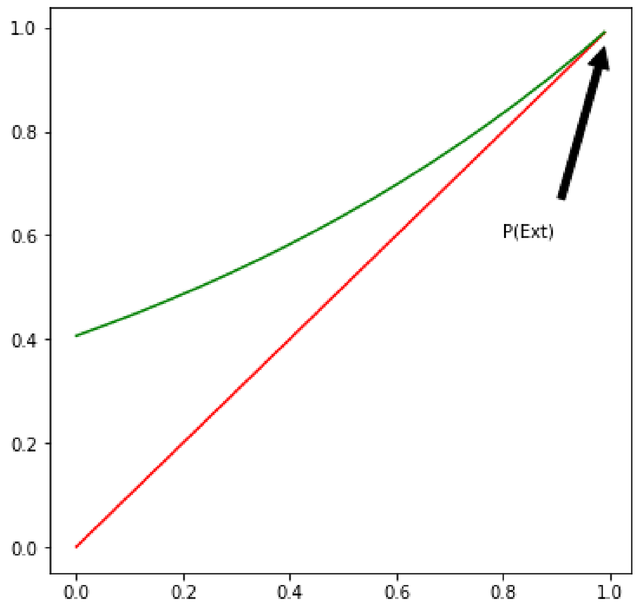

Figure 1: Le graphe de φ_μ où μ est une loi de Poisson de paramètre 0,9.

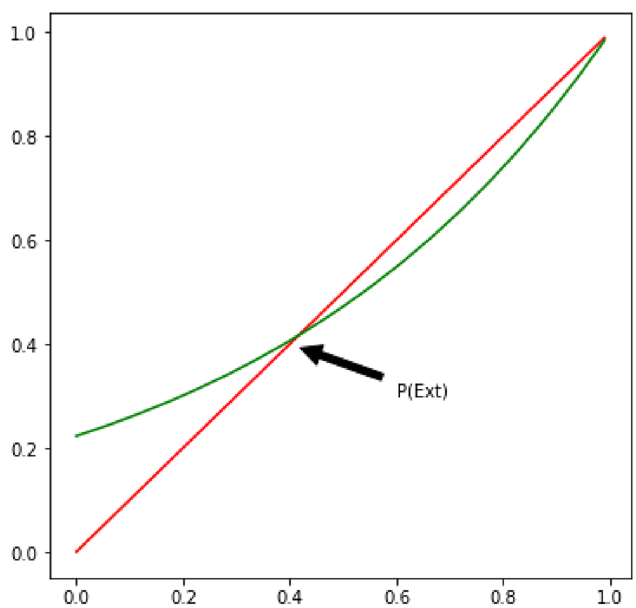

Figure 2: Le graphe de φ_μ où μ est une loi de Poisson de paramètre 1,5.

- $(\mathbb{X}, d)$ un espace métrique compact que l'on muni de sa tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{X})$.

- $T : \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ une application continue.

On notera :

- $\mathcal{P}(\mathbb{X})$ l'ensemble des probabilités sur $\mathbb{X}$.

- $\mathcal{P}_T(\mathbb{X})$ l'ensemble des probabilités T-invariantes sur $\mathbb{X}$.

- $\mathcal{E}_T(\mathbb{X})$ l'ensemble des probabilités T-ergodiques sur $\mathbb{X}$.

On munit $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ l'ensemble des probabilités sur $\mathbb{N}$ de la topologie engendrée par ℓ^∞ et de la tribu borélienne associée.
On se donne aussi :

$$\mu : \begin{cases} \mathbb{X} & \to \mathcal{P}(\mathbb{N}) \\ x & \mapsto \mu_x \end{cases}$$

une application continue qui à un élément de $\mathbb{X}$ associe une probabilité sur $\mathbb{N}$. C'est cette fonction qui permet d'associer à un élément $x \in \mathbb{X}$, une loi de reproduction $\mu_x \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

Nous allons maintenant définir les processus de Galton-Watson en environnement dynamique. Le principe reste le même que pour le cas classique, un processus de Galton-Watson en environnement dynamique est un modèle d'évolution de population à temps discret. Les lois de reproduction sont toujours indépendantes. Mais contrairement au cas classique, la loi de reproduction sera ici différente à chaque génération, elle dépendra alors de l'environnement et elle évoluera selon un système dynamique.

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité. On peut associer à $x \in \mathbb{X}$ un processus de branchement $(Z_n(x), n \in \mathbb{N})$ défini par récurrence :

$$\begin{aligned} Z_0(x) &= 1 \text{ p.s.} \\ Z_{n+1}(x) &= \sum_{i=1}^{Z_n(x)} Y_{n,i}(x) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

où $\{Y_{n,i}(x), (n,i) \in \mathbb{N}^2\}$ est une famille de variables aléatoires indépendantes tel que pour tout $(n,i) \in \mathbb{N}^2$, $Y_{n,i}(x)$ suit la loi de $\mu_{T^n x}$.

$Z_n(x)$ est une variable aléatoire représentant la taille de notre population à la n-ième génération lorsque la loi de reproduction de la i-ème génération est $\mu_{T^i x}$ pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$.

La famille de variables aléatoires $(Z_n(x), n \in \mathbb{N})$ est le processus de Galton-Watson associée au système dynamique à temps discret $(\mathbb{X}, \mathcal{B}(\mathbb{X}), T)$, à la fonction de loi de reproduction μ et au point $x \in \mathbb{X}$.

1.3 Le cas de la transformation $x \mapsto 2x$

Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on pose :

- $\mathbb{X} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ muni de la tribu des boréliens $\mathcal{B}(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ et de la distance usuelle sur le cercle.
- $T := \begin{cases} \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z} \\ x \mapsto 2x \text{ modulo } 1 \end{cases}$
- $\mu_{\lambda,x} := \begin{cases} \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathcal{P}(\mathbb{N}) \\ x \mapsto \text{Pois}(e^{\lambda - \cos(2\pi x)}) \end{cases}$

Alors $(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, \mathcal{B}(\mathbb{R}/\mathbb{Z}), T)$ est un système dynamique mesurable compact et T est une application continue. De plus, $\mu_{\lambda,\cdot}$ est continue pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$. On a une famille paramétrée par λ de modèles car nous sommes dans les hypothèses du modèle général pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$. Cela nous donne donc pour chaque $\lambda \in \mathbb{R}$ et chaque $x \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, un exemple de processus de Galton-Watson en environnement dynamique.

Ce paramètre λ nous permettra d'observer une bifurcation dans le modèle.

2 Fonction génératrice des probabilités

2.1 Fonction génératrice des probabilités

Nous allons maintenant nous intéresser aux fonctions génératrices des probabilités de $Z_n(x)$ qui permettent de caractériser la taille de la population à la n-ième génération.

Définition 2.1.1. • *À tout $x \in \mathbb{X}$, on associe sa fonction génératrice des probabilités définie sur $[0,1]$ par :*

$$\varphi(x,s) := \sum_{j=0}^{\infty} \mu_x(j) s^j = \mathbb{E}(s^{Z_1(x)}).$$

- *Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $x \in \mathbb{X}$, on définit la fonction génératrice associée à la loi de $Z_n(x)$, c'est à dire que pour tout $s \in [0,1]$,*

$$\varphi^{(n)}(x,s) := \sum_{j=0}^{\infty} \mu_x^{(n)}(j) s^j = \mathbb{E}(s^{Z_n(x)}),$$

  où pour tout $j \in \mathbb{N}$, $\mu_x^{(n)}(j) = \mathbb{P}(Z_n(x) = j)$.

Remarque 2.1.2. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in \mathbb{X}$, pour tout $s \in [0,1]$,*

$$\varphi(T^n x, s) = \mathbb{E}(s^{Y_{n,1}(x)}).$$

Nous allons maintenant montrer des relations de récurrences permettant de relier $\varphi^{(n)}$ et φ. Ces relations permettront donc de relier la distribution de la taille de la population à la n-ième génération à partir des lois de reproduction de chaque génération.

Lemme 2.1.3. *Pour tous $x \in \mathbb{X}$, $n \in \mathbb{N}$ et $s \in [0,1]$,*

$$\varphi^{(n+1)}(x,s) = \varphi^{(n)}(x, \varphi(T^n x, s)).$$

Preuve. Soient $x \in \mathbb{X}$, $n \in \mathbb{N}$ et $s \in [0,1]$.

$$\begin{aligned}
\varphi^{(n+1)}(x,s) &= \mathbb{E}[s^{Z_{n+1}(x)}] \\
&= \mathbb{E}[s^{\sum_{i=1}^{Z_n(x)} Y_{n,i}}] \\
&= \mathbb{E}[\mathbb{E}[s^{\sum_{i=1}^{Z_n(x)} Y_{n,i}} | Z_n]] \\
&= \mathbb{E}[\mathbb{E}[s^{Y_{n,1}(x)}]^{Z_n(x)}] \\
&\text{car la famille } \{Y_{n,i}, i \in \mathbb{N}\} \text{ est i.i.d. et indépendante de } Z_n(x) \\
&= \mathbb{E}[\varphi(T^n x, s)^{Z_n(x)}] \\
&= \varphi^{(n)}(x, \varphi(T^n x, s))
\end{aligned}$$

□

On obtient alors par récurrence immédiate le corollaire suivant :

Corollaire 2.1.4. *Soit $x \in \mathbb{X}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $s \in [0,1]$:*

1. $\varphi^{(n+1)}(x,s) = \varphi(x, \varphi(Tx, ...\varphi(T^{n-1}, \varphi(T^n x, s))...))$
2. $\varphi^{(n+1)}(x,s) = \varphi(x, \varphi^{(n)}(Tx, s))$
3. *Pour tout $0 \leq k \leq n$, $\varphi^{(n)}(x,s) = \varphi^{(k)}(x, \varphi^{(n-k)}(T^k x, s))$.*

Nous allons maintenant nous intéresser aux propriétés de φ.

Lemme 2.1.5. *Dans l'espace $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, les topologies engendrées par les normes 1 et ∞ sont les mêmes.*

Preuve. Pour la preuve on identifie $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ et $\{x = (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in [0,1]^{\mathbb{N}} : \sum_{k=0}^{\infty} x_k = 1\}$. Soient $(x^n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{P}(\mathbb{N})^{\mathbb{N}}$ et $x \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

- Si $x^n \underset{n\to\infty}{\overset{\ell^1}{\to}} x$, alors $x^n \underset{n\to\infty}{\overset{\ell^\infty}{\to}} x$ car $\|x^n - x\|_\infty \leq \|x^n - x\|_1$.

- Réciproquement, si $x^n \underset{n\to\infty}{\overset{\ell^\infty}{\to}} x$, montrons que $x^n \underset{n\to\infty}{\overset{\ell^1}{\to}} x$.
  Soit $\varepsilon > 0$. Comme $\sum_{k=0}^{\infty} x_k = 1$ alors il existe $K \in \mathbb{N}$ tel que $\sum_{k=0}^{K} x_k \geq 1 - \varepsilon$.
  Or $x^n \underset{n\to\infty}{\overset{\ell^\infty}{\to}} x$ donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $\|x^n - x\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{K}$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
\|x^n - x\|_1 &= \sum_{k=0}^{\infty} |x_k^n - x_k| \\
&\leq \sum_{k=0}^{K} |x_k^n - x_k| + \sum_{k=K+1}^{\infty} x_k^n + \sum_{k=K+1}^{\infty} x_k \\
&\leq K\frac{\varepsilon}{K} + \varepsilon + 2\varepsilon = 4\varepsilon
\end{aligned}$$

  car $\sum_{k=0}^{K} x_k^n \geq \sum_{k=0}^{K} x_k - \sum_{k=0}^{K} |x_k^n - x_k| \geq 1 - \varepsilon - K\frac{\varepsilon}{K} \geq 1 - 2\varepsilon$. □

Ce lemme nous permet de montrer la proposition suivante :

Proposition 2.1.6. *La fonction φ est continue sur $\mathbb{X} \times [0,1]$.*

Preuve. Soient $x, y \in \mathbb{X}$ et $s, t \in [0,1]$. Alors,

$$\begin{aligned}
|\varphi(x,s) - \varphi(y,t)| &\leq |\varphi(x,s) - \varphi(x,t)| + |\varphi(x,t) - \varphi(y,t)| \\
&\leq |\varphi(x,s) - \varphi(x,t)| + \sum_{k=0}^{\infty} |\mu_x(k) - \mu_y(k)| t^k \\
&\leq |\varphi(x,s) - \varphi(x,t)| + \sum_{k=0}^{\infty} |\mu_x(k) - \mu_y(k)| \text{ car } t \in [0,1] \\
&= |\varphi(x,s) - \varphi(x,t)| + \|\mu_x - \mu_y\|_1.
\end{aligned}$$

La continuité découle alors de la continuité de μ, du Lemme 2.1.5 et de la continuité de $\varphi(x, .)$. □

Remarque 2.1.7. *Pour tout $x \in \mathbb{X}$, $\varphi(x, .)$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0, 1[$. Sa dérivée est même bien définie en 1 si l'on admet la valeur $+\infty$ par monotonie. On notera $\partial_s \varphi$ la dérivée de la fonction φ en la seconde variable.*

Définition 2.1.8. *Soit $x \in \mathbb{X}$. On définit :*

- *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $B_n(x)$ l'ensemble d'extinction à la n-ième génération par $B_n(x) := \{Z_n(x) = 0\}$.*
- $B(x) := \bigcup_{n=0}^{\infty} B_n(x) = \lim_{n\to\infty} \nearrow B_n(x)$ *l'ensemble d'extinction.*
- $q_n(x) = \mathbb{P}(B_n(x))$ *la probabilité d'extinction avant la n-ième génération.*
- $q(x) = \mathbb{P}(B(x)) = \lim_{n\to\infty} \nearrow q_n(x)$ *la probabilité d'extinction.*

La fonction q peut s'exprimer grâce aux fonctions génératrices des probabilités.

Lemme 2.1.9. *Soit $x \in \mathbb{X}$.*

1. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $q_n(x) = \varphi^{(n)}(x, 0)$.*
2. $q(x) = \lim_{n\to\infty} \varphi^{(n)}(x, 0)$.
3. $q(x) = \varphi(x, q(Tx))$.
4. *q est semi-continue inférieurement.*

Preuve. 1. Soient $x \in \mathbb{X}$ et $n \in \mathbb{N}$. Alors $\varphi^{(n)}(x, 0) = \mu_x^{(n)}(0) = \mathbb{P}(B_n(x))$.

2. Soit $x \in \mathbb{X}$. Comme $q_n(x) \underset{n\to\infty}{\nearrow} q(x)$, par 1, $q(x) = \lim_{n\to\infty} \varphi^{(n)}(x, 0)$.

3. Soit $x \in \mathbb{X}$. Alors :

$$\begin{aligned} q(x) &= \lim_{n\to\infty} \varphi^{(n+1)}(x, 0) \\ &= \lim_{n\to\infty} \varphi(x, \varphi^{(n)}(Tx, 0)) \text{ par le Corollaire 2.1.4} \\ &= \varphi(x, \lim_{n\to\infty} \varphi^{(n)}(Tx, 0)) \text{ par continuité de } \varphi \\ &= \varphi(x, q(Tx)). \end{aligned}$$

4. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{X}$.

$$q_n(x) = \varphi^{(n)}(x, 0) = \varphi(x, \varphi(Tx, ...\varphi(T^{n-1}, \varphi(T^{n-1}x, 0))...)).$$

La fonction q_n est continue comme composée de fonctions continues. Or $q(x) = \lim_{n\to\infty} \nearrow q_n(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} q_n(x)$. Donc q est semi-continue inférieurement car pour tout $n \in \mathbb{N}$, q_n est continue. □

Définition 2.1.10. *On note* $N = \{x \in \mathbb{X} : q(x) = 1\}$

L'ensemble N est l'ensemble des environnements pour lesquels il y a extinction presque sûre du processus $\{Z_n(x), n \in \mathbb{N}\}$. C'est l'ensemble des “mauvais environnements”.

Corollaire 2.1.11. *On pose* $\mathbb{X}_0 = \{x \in \mathbb{X} : \mu_x = \delta_0\}$ *et* $\mathbb{X}_0^C = \mathbb{X}\backslash\mathbb{X}_0$ *son complémentaire.* $N = (T^{-1}N) \cup \mathbb{X}_0$. *En particulier :*

- *si* $\mathbb{X}_0 = \emptyset$ *alors* $T^{-1}N = N$.
- *si* $\nu \in \mathcal{E}_T(\mathbb{X})$, $\nu(N) \in \{0, 1\}$.

Preuve. On remarque que $\mathbb{X}_0 \subset N$.

$$\begin{aligned} \text{Or } N \cap \mathbb{X}_0^C &= \{x \in \mathbb{X}_0^C : q(x) = 1\}. \\ &= \{x \in \mathbb{X}_0^C : \varphi(x, q(Tx)) = 1\} \text{ par le Lemme 2.1.9.} \\ &= \{x \in \mathbb{X}_0^C : q(Tx) = 1\} \text{ car pour tout } x \in \mathbb{X}_0^C,\ \mu_x \neq \delta_0 \\ &= (T^{-1}N) \cap \mathbb{X}_0^C. \end{aligned}$$

Donc $N = (T^{-1}N) \cup \mathbb{X}_0$.
Supposons maintenant que $\nu \in \mathcal{E}_T(\mathbb{X})$. Par ergodicité de ν, comme $T^{-1}N \subset N$ alors $\nu(N) \in \{0, 1\}$. □

Lemme 2.1.12. *N est un G_δ.*

Preuve. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\{x \in \mathbb{X} : q(x) > 1 - \frac{1}{k}\}$ est ouvert car q est semi-continue inférieurement. De plus,

$$\begin{aligned} N &= \{x \in \mathbb{X} : q(x) = 1\} \\ &= \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \{x \in \mathbb{X} : q(x) > 1 - \frac{1}{k}\} \text{ car } q \leq 1. \end{aligned}$$ □

2.2 Retour à l'exemple $x \mapsto 2x$

Dans le cadre de l'exemple de la partie 1.3, on peut calculer explicitement la fonction génératrice des probabilités. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On définit la fonction g_λ de $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ par : pour tout $x \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$,

$$g_\lambda(x) = e^{\lambda - \cos 2\pi x}.$$

On a alors pour tout $x \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ et $s \in [0, 1]$,

$$\begin{aligned} \varphi_\lambda(x, s) =& \exp\left(e^{\lambda - \cos 2\pi x}(s-1)\right) = \exp\left(g_\lambda(x)(s-1)\right) \\ \text{et } \ \partial_s \varphi_\lambda(x, s) =& g_\lambda(x) \varphi_\lambda(x, s). \end{aligned}$$

On remarque ici l'importance d'avoir considéré des lois de Poisson qui nous permettent d'avoir cette forme produit pour la dérivée.

Les résultats de la partie précédente permettent de donner beaucoup d'informations sur N lorsqu'on est dans le cas de notre exemple. On notera $N = N_\lambda$ pour montrer la dépendance de N en $\lambda \in \mathbb{R}$. On fixe dans cette partie $\lambda \in \mathbb{R}$.

Corollaire 2.2.1. *N_λ est vide ou N_λ est un G_δ dense.*

Preuve. Si N_λ est non vide alors il existe $x \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ tel que $x \in N_\lambda$. Or par le Corollaire 2.1.11, $T^{-1} N_\lambda \subset N_\lambda$ donc $\underset{n \in \mathbb{N}}{\cup} T^{-n} N_\lambda \subset N_\lambda$.

Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $(\omega_1, ...\omega_n) \in \{0, 1\}^n$, l'ensemble $\sum_{i=1}^{n} \frac{\omega_i}{2^i} + \frac{x}{2^{n+1}} \in T^{-n} N_\lambda \subset N_\lambda$.
L'ensemble $\left\{\sum_{i=1}^{n} \frac{\omega_i}{2^i} + \frac{x}{2^{n+1}} : n \in \mathbb{N}, (\omega_1, ...\omega_n) \in \{0, 1\}^n\right\}$ est dense dans $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ et inclus dans N_λ, donc par le Lemme 2.1.12, N_λ est un G_δ dense. □

3 Probabilité de survie en environnement stationnaire

3.1 Les résultats d'Athreya et Karlin

Athreya et Karlin en 1971 [AK71] ont travaillé sur ce sujet avec un point de vue probabiliste en considérant une suite d'environnements qui suit un processus ergodique stationnaire. Ils ont obtenu, sous des hypothèses d'intégrabilité, un critère pour savoir si la mesure de l'ensemble N est nulle ou pleine lorsqu'on considère une mesure ergodique.

Dans cette partie, on se donne $\nu \in \mathcal{E}_T(\mathbb{X})$. On a vu dans le Corollaire 2.1.11 que $\nu(N) \in \{0,1\}$. Il nous reste donc à voir si $\nu(N)$ vaut 0 ou 1.

Théorème 3.1.1. *[AK71, Théorème 1] Si $\nu(N) = 0$ et $\mathbb{E}_\nu(\log \partial_s \varphi(x,1))^+ < \infty$ alors :*

- $\mathbb{E}_\nu |\log \partial_s \varphi(x,1)| < \infty$ *et* $\mathbb{E}_\nu(\log \partial_s \varphi(x,1)) > 0$.
- $\mathbb{E}_\nu \left|\log \frac{1-q(x)}{1-q(Tx)}\right| < \infty$ *et* $\mathbb{E}_\nu \left(\log \frac{1-q(x)}{1-q(Tx)}\right) = 0$.

On en déduit par contraposée le corollaire suivant :

Corollaire 3.1.2. *[AK71, corollaire 1] Si $\mathbb{E}_\nu(\log \partial_s \varphi(x,1))^+ < \infty$ et $\mathbb{E}_\nu(\log \partial_s \varphi(x,1))^+ \leq \mathbb{E}_\nu(\log \partial_s \varphi(x,1))^- \leq \infty$, alors $\nu(N) = 1$.*

Théorème 3.1.3. *[AK71, Théorème 3] Si $\mathbb{E}_\nu(-\log(1-\varphi(x,0))) < \infty$ et $\mathbb{E}_\nu(\log \partial_s \varphi(x,1))^- < \mathbb{E}_\nu(\log \partial_s \varphi(x,1))^+ \leq \infty$, alors $\nu(N) = 0$.*

Supposons que l'on ait les hypothèses d'intégralité nécessaire, c'est à dire : $\mathbb{E}_\nu(-\log(1-\varphi(x,0))) < \infty$ et $\mathbb{E}_\nu(\log \partial_s \varphi(x,1))^+ < \infty$ ou $\mathbb{E}_\nu(\log \partial_s \varphi(x,1))^- < \infty$. Le corollaire 3.1.2 et le Théorème 3.1.3 nous donnent un critère pour savoir si on a ou non extinction ν-presque sûre dans le cas où ν est une mesure ergodique. En effet, $\nu(N) = 0$ si et seulement si $\mathbb{E}_\nu(\log \partial_s \varphi(x,1)) > 0$.

3.2 Application au cas $x \mapsto 2x$

Nous allons voir ce qu'impliquent les résultats d'Athreya et Karlin dans le cas de l'exemple $x \mapsto 2x$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
&\log \partial_s \varphi(x,1) = \log g_\lambda(x) = \lambda - \cos 2\pi x \in [\lambda - 1, \lambda + 1] \\
&-\log(1-\varphi(x,0)) = -\log(1-\exp(-e^{\lambda - \cos 2\pi x})) \\
&\in [-\log(1-\exp(-e^{\lambda+1})), -\log(1-\exp(-e^{\lambda-1}))].
\end{aligned}$$

Ces deux quantités sont bornées. Ainsi les hypothèses d'intégrabilité sont vérifiées dans le Corollaire 3.1.2 et dans le Théorème 3.1.3.
Soit $\nu \in \mathcal{E}_T(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$. Alors,

$$\mathbb{E}_{\nu,\lambda}[\log \partial_s \varphi(x,1)] = \lambda - \mathbb{E}_\nu[\cos 2\pi x].$$

Ainsi par le Corollaire 3.1.2 et le Théorème 3.1.3, $\nu(N_\lambda) = 1$ si et seulement si $\lambda \leq \mathbb{E}_\nu[\cos 2\pi x]$ (et donc $\nu(N_\lambda) = 0$ si et seulement si $\lambda > \mathbb{E}_\nu[\cos 2\pi x]$).

Il existe une partition $\{\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3\}$ de $\mathbb{R}$ où :

- $\Lambda_1 = \{\lambda \in \mathbb{R} : \forall \nu \in \mathcal{E}_T(\mathbb{R}/\mathbb{Z}) : \nu(N_\lambda) = 1\}$
- $\Lambda_2 = \{\lambda \in \mathbb{R} : \exists \nu_0, \nu_1 \in \mathcal{E}_T(\mathbb{R}/\mathbb{Z}) : \nu_0(N_\lambda) = 0 \text{ et } \nu_1(N_\lambda) = 1\}$
- $\Lambda_3 = \{\lambda \in \mathbb{R} : \forall \nu \in \mathcal{E}_T(\mathbb{R}/\mathbb{Z}) : \nu(N_\lambda) = 0\}$

Or pour tout $\nu \in \mathcal{E}_T(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$, $\mathbb{E}_\nu[\cos 2\pi x] \in [-1, 1]$ donc $]-\infty, -1] \subset \Lambda_1$ et $]1, +\infty] \subset \Lambda_3$. Pour obtenir plus d'informations sur les ensembles $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3$, nous allons déterminer les mesures ergodiques atomiques de notre transformation.
Soit $\nu \in \mathcal{E}_T(\mathbb{X})$ une mesure atomique. Comme une mesure ergodique est de mesure finie et T-invariante, cela impose que la mesure ergodique soit supportée par des orbites périodiques. Comme ν est ergodique, la mesure est supportée par une seule orbite périodique et cette mesure doit être uniforme sur cette orbite. Soit $x \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. x appartient à une orbite périodique si et seulement s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{N}$ tel que $2^n x = x + k$ i.e. $x = \frac{k}{2^n - 1}$. Si c'est le cas, on note n_0 le plus petit $n \in \mathbb{N}^*$ tel qu'il existe $k \in \mathbb{N}$, tel que $x = \frac{k}{2^{n_0} - 1}$ alors l'orbite périodique qui contient x est de cardinal n_0 et elle est composé des éléments $\{x, 2x, ..., 2^{n_0 - 1} x\}$. Par exemple, $\delta_0 \in \mathcal{E}_T(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ et $\mathbb{E}_{\delta_0}[\cos 2\pi x] = 1$. Donc pour tout $\lambda \leq 1$, $\delta_0(N_\lambda) = 1$. Ainsi $\Lambda_3 =]1, +\infty[$.

Si $\lambda \in \Lambda_1 \cup \Lambda_2 =]-\infty, 1]$, alors il existe $\nu \in \mathcal{E}_T(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ tel que $\nu(N_\lambda) = 1$. En particulier N_λ est non vide donc par le Corollaire 2.2.1, N_λ est un G_δ dense.

Si $\lambda \in \Lambda_3 =]1, +\infty]$ alors pour tout $x \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, les lois $\mathcal{P}(e^{\lambda - \cos 2\pi x})$ dominent stochastiquement la loi $\mathcal{P}(e^{\lambda - 1})$ qui est d'espérance strictement supérieure à 1. Ainsi $N_\lambda = \emptyset$.

Nous allons maintenant essayer de déterminer la frontière entre Λ_1 et Λ_2. On observe numériquement (grâce au code A) que la fonction q_λ semble

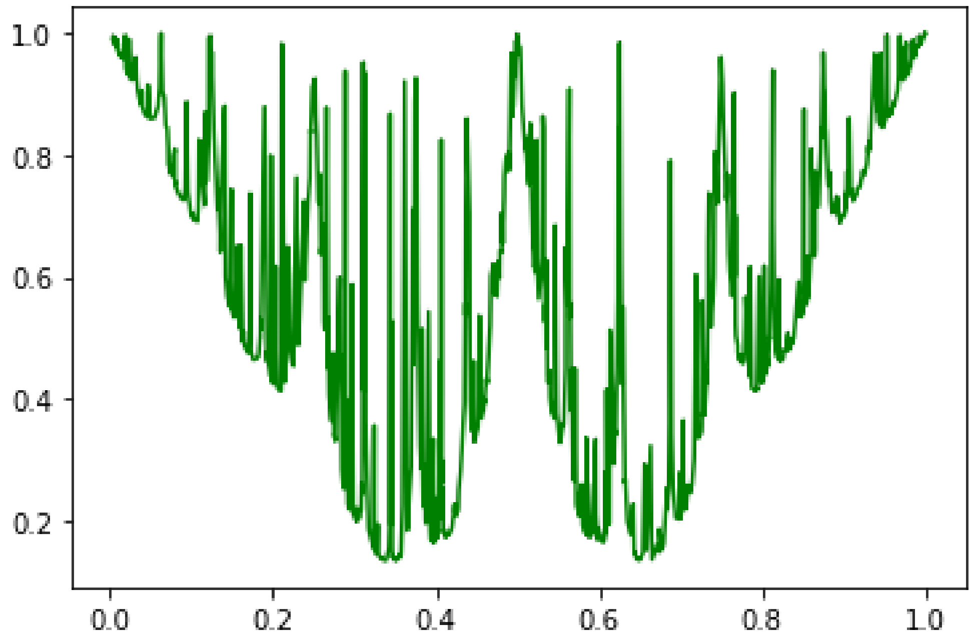

Figure 3: Le graphe de q_λ pour $\lambda = \frac{1}{3}$.

minimale sur l'ensemble $\left\{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right\}$ (voir figure 5). La mesure atomique ergodique $\nu = \frac{1}{2}\delta_{\frac{1}{3}} + \frac{1}{2}\delta_{\frac{2}{3}}$ pourrait donc être une mesure qui minimise la quantité $\inf\{\lambda \in \mathbb{R} : \nu(N_\lambda) = 0\}$. Or dans ce cas $\mathbb{E}_\nu[\cos 2\pi x] = \frac{1}{2}\cos\frac{2\pi}{3} + \frac{1}{2}\cos\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2}$. Nous pouvons prouver que $\frac{1}{2}\delta_{\frac{1}{3}} + \frac{1}{2}\delta_{\frac{2}{3}}$ minimise la quantité $\mathbb{E}_\nu[\cos 2\pi x]$ grâce à un article de Thierry Bousch [Bou00]. En effet dans cet article, Thierry Bousch étudie la probabilité qui maximise $\mathbb{E}_\nu[\cos 2\pi(x-\omega)]$. Notre problème revient donc à prendre $\omega = \frac{1}{2}$. On obtient alors [Bou00, Tab 1] que $\mathbb{E}_\nu[\cos 2\pi(x - \frac{1}{2})]$ a pour valeur maximale $\frac{1}{2}$. Cet article permet aussi de retrouver que la mesure qui maximise est bien $\frac{1}{2}\delta_{\frac{1}{3}} + \frac{1}{2}\delta_{\frac{2}{3}}$. En effet, Thierry Bousch introduit le paramètre d'angle ρ qui vaut dans ce cas $\frac{1}{2}$. Et on a par [BS94] que le support de la mesure est une orbite de période 2. ν s'écrit alors $\alpha(\frac{1}{2}\delta_{\frac{1}{3}} + \frac{1}{2}\delta_{\frac{2}{3}}) + (1-\alpha)\delta_0$ avec $\alpha \in [0,1]$. Il est alors évident de conclure que le maximum est atteint pour $\alpha = 1$.

Remarque 3.2.1. *Soient $f, g : \mathbb{R}/_{\mathbb{Z}} \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues. On dit que f et g sont cohomologues s'il existe $h : \mathbb{R}/_{\mathbb{Z}} \to \mathbb{R}$ continue telle que $f = g + h \circ T - h$. C'est une relation d'équivalence sur l'ensembles des*

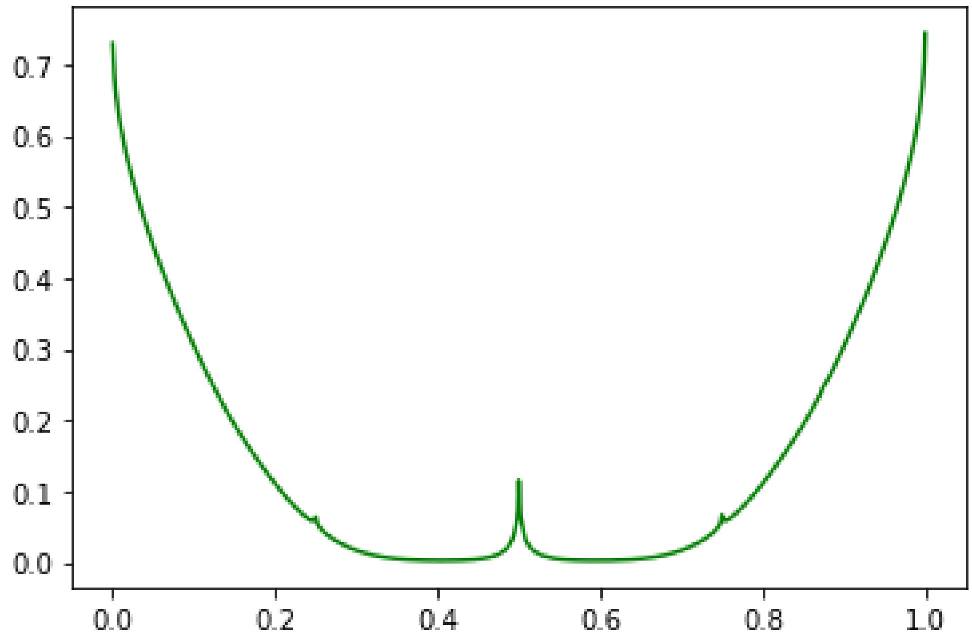

Figure 4: Le graphe de q_λ pour $\lambda = 1,1$.

fonctions continues. Une fonction cohomologue à 0 est appelée un cobord.

Montrons par l'absurde que $\log g = -\cos(2\pi x)$ n'est pas cohomologue à une constante $c \in \mathbb{R}$. Alors en particulier, $\int -\cos(2\pi x)\,\mathrm{d}\nu = c$ pour tout $\nu \in \mathcal{P}_T(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$. Cependant $m, \delta_0 \in \mathcal{P}_T(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ (en notant m la mesure de Lebesgue) et $\int -\cos(2\pi x)\,\mathrm{d}m = 0 \neq -1 = \int -\cos(2\pi x)\,\mathrm{d}\delta_0$. C'est absurde.

On peut donc conclure sur les différents régimes de notre application grâce au tableau récapitulatif suivant :

Si $\lambda \in$	$]-\infty, -1]$	$]-1, -\frac{1}{2}]$	$]-\frac{1}{2}, 1]$	$]1, +\infty[$
alors	$\forall x \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, $q_\lambda(x) = 1$.	$\forall \nu \in \mathcal{E}_T(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$, $\nu(N_\lambda) = 1$.	$\exists \nu_0, \nu_1 \in \mathcal{E}_T(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$, tel que $\nu_0(N_\lambda) = 0$ et $\nu_1(N_\lambda) = 1$.	$\forall x \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, $q_\lambda(x) < 1$.

Grâce aux résultats de la partie 6.1, en particulier le Théorème ergodique

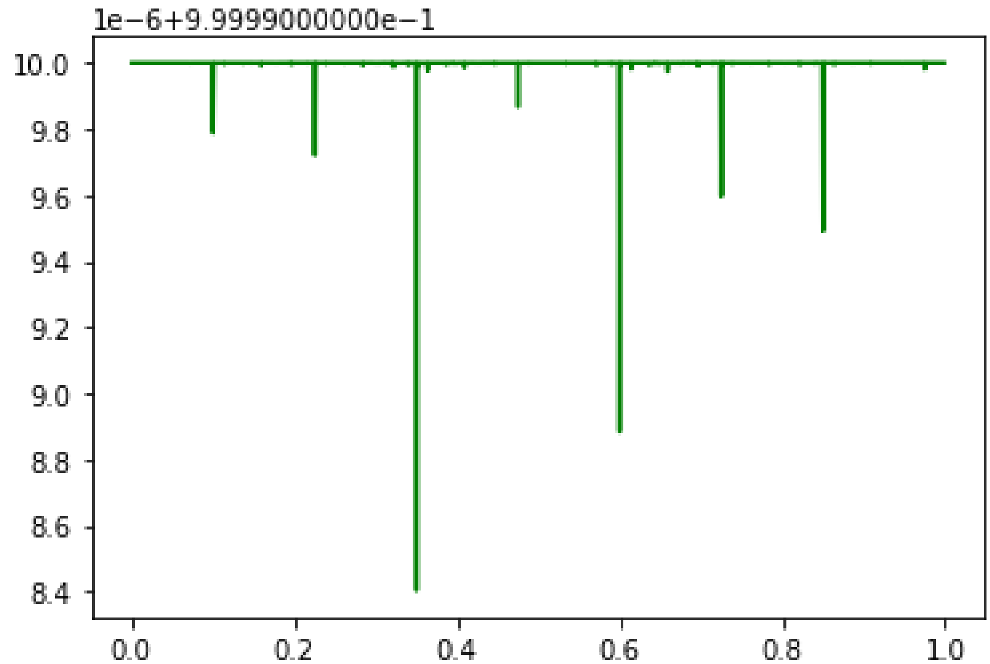

Figure 5: Le graphe de q_λ pour $\lambda = -0.52$.

semi-uniforme 6.1.4, on pourra montrer que pour $\lambda < -\frac{1}{2}$, $q_\lambda(x) = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}/_{\mathbb{Z}}$.

4 Formalisme Thermodynamique

4.1 Dimension de Hausdorff et dimension de packing

Nous allons utiliser les définitions du livre : *Techniques in fractal geometry* [Fal97, 2.1] écrit par Kenneth Falconer pour définir les dimensions de Hausdorff et de packing. Ces deux dimensions permettront notamment de caractériser la dimension des ensembles N_λ pour $\lambda \in \mathbb{R}$ et ainsi d'étudier la bifurcation. Contrairement à la partie précédente où nous avons caractérisé N_λ grâce à des mesures, nous aurons dans cette partie un point de vue topologique.

Soit $d \in \mathbb{N}$ (la dimension de l'espace dans lequel on travaille). Pour $U \subset \mathbb{R}^d$, on note $|U| = \sup\{|x-y| : x, y \in U\}$ le diamètre de U.

Nous allons définir la dimension de Hausdorff. Une collection finie ou dénombrable de sous-ensembles $\{U_i\}_{i\in I}$ de $\mathbb{R}^d$ est appelé un δ-recouvrement de l'ensemble $E \subset \mathbb{R}^d$ si $|U_i| \leq \delta$ pour tout $i \in I$ et $E \subset \cup_{i\in I} U_i$.

Soit E un sous-ensemble de $\mathbb{R}^d$ et $s \geq 0$. Pour tout $\delta > 0$, on définit :

$$\mathcal{H}^s_\delta(E) := \inf \left\{ \sum_{i\in I} |U_i|^s : \{U_i\} \text{ est un } \delta\text{-recouvrement de } E \right\}$$

Lorsque δ diminue, l'ensemble des δ-recouvrements diminue et donc l'infimum augmente. On peut alors définir :

$$\mathcal{H}^s(E) := \lim_{\delta\to 0} \mathcal{H}^s_\delta(E) \in [0, +\infty]$$

On appelle cette quantité la mesure de Hausdorff de dimension s de E. En particulier $\mathcal{H}^s(E)$ est une mesure de Borel sur $\mathbb{R}^d$. On peut alors définir la dimension de Hausdorff de E :

$$\dim_H E := \inf\{s : \mathcal{H}^s(E) = 0\} = \sup\{s : \mathcal{H}^s(E) = \infty\}$$

On définit la dimension de Hausdorff d'une probabilité $\nu \in \mathcal{P}(\mathbb{X})$ par :

$$\dim_H \nu = \inf\{\dim_H Z : \nu(\mathbb{X} \backslash Z) = 0\}.$$

Par exemple, si ν est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}/_{\mathbb{Z}}$ alors $\dim_H \nu = 1$. En effet, la mesure de Hausdorff de dimension 1 est équivalente à la mesure de Lebesgue de dimension 1 mais aussi pour les dimensions supérieurs entières (voir [Sch07, partie 3]). Ainsi un ensemble de mesure de Lebesgue (de dimension 1) strictement positive mais finie est de dimension de Hausdorff égale à 1. Ainsi pour tout $Z \subset \mathbb{X}$ tel que $\nu(Z) = 1$, $\dim_H(Z) = 1$.

Si ν est à support fini alors $\dim_H \nu = 0$ et l'infimum est atteint en prenant pour Z le support de la mesure ν.

Nous allons maintenant définir la dimension de packing. Une collection finie ou dénombrable de boules disjointes $\{B_i\}_{i\in I}$ de $\mathbb{R}^d$ est appelé un δ-packing de l'ensemble $E \subset \mathbb{R}^d$ si pour tout $i \in I$ le rayon de B_i est inférieur à δ et le centre de B_i est inclus dans E.

Soit E un sous ensemble de $\mathbb{R}^d$ et $s \geq 0$. Pour tout $\delta > 0$, on définit :

$$\mathcal{P}^s_\delta(E) := \sup \left\{ \sum_{i \in I} |B_i|^s : \{B_i\} \text{ est un } \delta\text{-packing de } E \right\}$$

Lorsque δ diminue, l'ensemble des δ-packing diminue et donc le supremum diminue. On définit :

$$\mathcal{P}^s_0(E) := \lim_{\delta \to 0} \mathcal{P}^s_\delta(E) \in [0, +\infty].$$

Cependant, $\mathcal{P}^s_0$ n'est pas une mesure, on définit alors :

$$\mathcal{P}^s(E) = \inf \left\{ \sum_{i \in I} \mathcal{P}^s_0(E_i) : E \subset \cup_{i \in I} E_i \right\}$$

Cette quantité est une mesure de Borel sur $\mathbb{R}^d$ appelé la mesure de packing de dimension s. On peut ensuite définir la dimension de packing de E :

$$\dim_P E = \inf\{s : \mathcal{P}^s(E) = 0\} = \sup\{s : \mathcal{P}^s(E) = \infty\}$$

Ces deux dimensions ont certaines propriétés communes, on notera donc dim dans la proposition suivante des résultats s'appliquant aussi bien à la dimension d'Hausdorff qu'à la dimension de packing.

Proposition 4.1.1. *On a les résultats suivants sur la dimension de Hausdorff et de packing :*

- *Monotonie : si* $E_1 \subset E_2$ *alors* $\dim E_1 \leq \dim E_2$.
- *Ensemble fini : si* E *est fini alors* $\dim E = 0$.
- *Ensemble ouvert : si* E *est un ensemble ouvert (non vide) de* $\mathbb{R}^d$ *alors* $\dim E = d$.
- *Variété lisse : si* E *est une sous-variété lisse de dimension* ℓ *dans* $\mathbb{R}^d$ *alors* $\dim E = \ell$.
- *Fonction lipschitzienne : si* $f : E \to \mathbb{R}^m$ *est lipschitzienne alors* $\dim f(E) \leq \dim E$.

- *Fonction bi-lipschitzienne : si $f : E \to f(E)$ est bi-lipschitzienne alors* $\dim f(E) = \dim E$.
- *Invariance géométrique : Si f est une similitude ou une transformation affine alors* $\dim f(E) = \dim E$.

Les dimensions de Hausdorff et de packing peuvent être comparées grâce au résultat suivant :

Proposition 4.1.2. *Pour tout ensemble (non-vide) E,* $\dim_H E \leq \dim_P E$.

Par [Fal90, Proposition 3.8], la dimension de packing est égale à une autre dimension appelée upper modified box-counting dimension : $\overline{\dim}_{MB}$. Cette dimension est définie par : pour tout $E \subset \mathbb{R}^d$,

$$\overline{\dim}_{MB} E = \inf\{\sup_i \overline{\dim}_B(F_i) : E \subset \cup_{i\in\mathbb{N}} F_i\}$$

où l'infimum est pris sur tous les recouvrement dénombrables de E [Fal90, partie 3.3]. On ne précisera pas ici la définition de $\overline{\dim}_B$, le lecteur peut se référer à [Fal90, partie 3.1]. Ces dimensions sont monotones et respectent la propriété des ensembles ouverts (voir la Proposition 4.1.1 pour les définitions). $\overline{\dim}_B$ est invariante par passage à l'adhérence et comme $\overline{\dim}_B$ est invariante par passage à l'adhérence alors on peut ne considérer que des recouvrements par des ensembles fermés dans la définition de $\overline{\dim}_{MB} E$ ([Fal90, partie 3.1 et 3.2]). Ainsi on a :

Proposition 4.1.3. *Pour tout $E \subset \mathbb{R}^d$:*

$$\dim_P E = \inf\{\sup_i \overline{\dim}_B(F_i) : E \subset \cup_{i\in\mathbb{N}} F_i\}$$

où l'infimum est pris sur tous les recouvrements dénombrables de E par des fermés.

4.2 Pression topologique

Nous allons maintenant introduire des notions de formalisme thermodynamique en reprenant celles introduites dans [Bar08, 2.3].
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on munit $\mathbb{X}$ d'une nouvelle distance :

$$d_n(x, y) = \max\{d(T^k x, T^k y) : 0 \leq k \leq n-1\}$$

Soit $\varepsilon > 0$, on dit qu'un ensemble fini $E \subset \mathbb{X}$ est (n, ε)-séparé si $d_n(x, y) > \varepsilon$ pour tout $x, y \in E$ tel que $x \neq y$.

Définition 4.2.1. *On peut définir :*

- *l'entropie topologique de la transformation T par :*

$$h_{top}(T) := \lim_{\varepsilon \to 0} \limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log N(n, \varepsilon)$$

où $N(n, \varepsilon)$ est le plus grand cardinal d'un ensemble (n, ε)-séparé.

- *la pression topologique de $\psi : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ continue par :*

$$P(\psi) := \lim_{\varepsilon \to 0} \limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log \sup_{E} \sum_{x \in E} \exp \sum_{k=0}^{n-1} \psi(T^k x)$$

où le supremum est pris sur les ensembles (n, ε)-séparés $E \subset \mathbb{X}$.

Ces deux quantités sont bien définies car l'ensemble des ensembles (n, ε)-séparés augmente lorsque ε décroit.

On remarque aussi que $P(0) = h_{top}(T)$.

On notera $h_T(\nu)$ pour $\nu \in \mathcal{E}_T(\mathbb{X})$ l'entropie mesurée du système dynamique mesuré $(\mathbb{X}, \mathcal{B}(\mathbb{X}), \nu, T)$. Pour la définition, voir [BV13, partie 8.5].

Le prochain Théorème est appelé le principe variationnel de la pression topologique (respectivement le principe variationnel de l'entropie topologique dans le cas $\psi = 0$).

Théorème 4.2.2. *[Rue73, Théorème 5.1] Pour toute fonction $\psi : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ continue :*

$$\begin{aligned} P(\psi) &= \sup_{\nu \in \mathcal{P}_T(\mathbb{X})} \left\{ h_T(\nu) + \int_{\mathbb{X}} \psi \, \mathrm{d}\nu \right\} \\ &= \sup_{\nu \in \mathcal{E}_T(\mathbb{X})} \left\{ h_T(\nu) + \int_{\mathbb{X}} \psi \, \mathrm{d}\nu \right\} \end{aligned}$$

En particulier, si $\psi = 0$:

$$\begin{aligned} h_{top}(T) = P(0) &= \sup_{\nu \in \mathcal{P}_T(\mathbb{X})} h_T(\nu) \\ &= \sup_{\nu \in \mathcal{E}_T(\mathbb{X})} h_T(\nu) \end{aligned}$$

Les propriétés suivantes sur la pression topologique proviennent de [Wal82, chapitre 9].

Proposition 4.2.3. *Soient f,g des fonctions continues de* $\mathbb{X}$ *dans* $\mathbb{R}$. *Soient* $\varepsilon > 0$ *et* $c \in \mathbb{R}$.

1. $f \leq g$ *implique que* $P(f) \leq P(g)$. *En particulier,* $h_{top}(T) + \inf f \leq P(f) \leq h_{top}(T) + \sup f$.
2. P *est fini si et seulement si* $h_{top}(T)$ *est fini.*
3. $P(f + c) = P(f) + c$.
4. $P(f + g \circ T - g) = P(f)$.
5. $P(f + g) \leq P(f) + P(g)$.
6. $P(cf) \leq cP(f)$ *si* $c \geq 1$ *et* $P(cf) \geq cP(f)$ *si* $c \leq 1$.
7. $|P(f)| \leq P(|f|)$.

Pour la preuve de cette proposition, voir [Wal82, Théorème 9.7].

Théorème 4.2.4. *Soit* $T : \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ *un homéomorphisme d'un espace métrique compact. Si* α *est une partition génératrice pour* T *alors pour toute fonction* $f : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ *continue,*

$$P(f) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log p_n(T, f, \alpha) = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log k_n(T, f, \alpha) \text{ où}$$

$$p_n(T, f, \alpha) = \inf\{\sum_{B\in\beta} \inf_{x\in B} e^{S_n f(x)} : \beta \text{ est un recouvrement fini de } \bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}\alpha\},$$

$$k_n(T, f, \alpha) = \inf\{\sum_{B\in\beta} \sup_{x\in B} e^{S_n f(x)} : \beta \text{ est un recouvrement fini de } \bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}\alpha\}.$$

Définition 4.2.5. $\nu \in \mathcal{P}_T(\mathbb{X})$ *est appelée mesure d'équilibre de* ψ *(relativement à T) si le supremum de* $P(\psi) = \sup_{\nu\in\mathcal{P}_T(\mathbb{X})}\{h_\nu(T) + \int_{\mathbb{X}} \psi \, \mathrm{d}\nu\}$ *est atteint par* ν.

Dans notre exemple $h_{top}(T) = \log 2$ (voir [BV13, Exemple 3.11] pour la preuve). Or $h_T(m) = \log 2$, ainsi m (la mesure de Lebesgue) est une mesure d'équilibre de la fonction $\psi = 0$.

4.3 u-dimension

Nous allons maintenant définir la u-dimension avec les définitions données dans [Bar08, 3.3.1 et 7.2]. On pourra relier la pression topologique et la u-dimension par la Proposition 4.3.1. On a dans [Bar08, Exemple 7.2.5] un exemple où avec une fonction u bien choisie, la dimension de Hausdorff est égale à la u-dimension.

On note $\mathcal{U}$ un recouvrement fini d'ouverts de $\mathbb{X}$. On notera $\operatorname{diam}\mathcal{U} = \sup\{\operatorname{diam} U : U \in \mathcal{U}\}$. On note $\mathcal{W}_n(\mathcal{U})$ l'ensemble des vecteurs $\mathbb{U} = (U_0, ...U_n)$ où $U_0, ..., U_n \in \mathcal{U}$ et on notera $l(\mathbb{U}) = n$. Pour tout $\mathbb{U} \in \mathcal{W}_n(\mathcal{U})$, on définit $X(\mathbb{U}) = \bigcap_{k=0}^{n} T^{-k}U_k$. On dit que l'ensemble $\Gamma \subset \cup_{n\geq 1}\mathcal{W}_n(\mathcal{U})$ est un recouvrement de l'ensemble $Z \subset \mathbb{X}$ si $Z \subset \bigcup_{\mathbb{U}\in\Gamma} X(\mathbb{U})$. Soit ψ une fonction continue de $\mathbb{X}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soit $\mathbb{U} \in \mathcal{W}_n(\mathcal{U})$. On définit :

$$\psi(\mathbb{U}) := \begin{cases} \sup_{X(\mathbb{U})} \sum_{k=0}^{n-1} \psi \circ T^k & \text{si } X(\mathbb{U}) \neq \emptyset \\ -\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour tout $Z \subset X$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, on note

$$M(Z, \alpha, \psi, \mathcal{U}) := \lim_{n\to\infty} \inf_{\Gamma} \sum_{\mathbb{U}\in\Gamma} \exp(-\alpha l(\mathbb{U}) + \psi(\mathbb{U}))$$

où l'infimum est pris sur les recouvrement finis ou dénombrables
$\Gamma \subset \cup_{k\geq n}\mathcal{W}_k(\mathcal{U})$ de Z.
Cela nous permet de définir la pression topologique de ψ dans l'ensemble $Z \subset \mathbb{X}$:

$$P_Z(\psi) := \lim_{\operatorname{diam}\mathcal{U}\to 0} \inf\{\alpha \in \mathbb{R} : M(Z, \alpha, \psi, \mathcal{U}) = 0\}$$

La pression topologique de ψ définit précédemment (Définition 4.2.1) coïncide bien avec la pression topologique de ψ dans l'ensemble $\mathbb{X}$. Cela permet notamment de définir la pression topologique dans des espaces non compacts. On peut aussi définir l'entropie topologique de T dans l'ensemble Z (introduit par Bowen [Bow73]) : $h_{top}(T|Z)$ comme la pression topologique de 0 dans l'ensemble Z, $P_Z(0)$.

Pour $u : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ continue, pour $S \subset \mathbb{X}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, on pose :

$$N(Z, \alpha, u, \mathcal{U}) := \lim_{n\to\infty} \inf_{\Gamma} \sum_{\mathbb{U}\in\Gamma} \exp(-\alpha u(\mathbb{U}))$$

où l'infimum est pris sur les recouvrement finis ou dénombrables
$\Gamma \subset \cup_{n\geq 1}\mathcal{W}_n(\mathcal{U})$ de Z.
On pose :

$$\dim_{u,\mathcal{U}} Z := \inf\{\alpha \in \mathbb{R} : N(Z, \alpha, u, \mathcal{U}) = 0\}.$$

Et cela permet de définir :

$$\dim_u Z = \lim_{\operatorname{diam} \mathcal{U} \to 0} \dim_{u,\mathcal{U}} Z.$$

La quantité $\dim_u Z$ est appelée la u-dimension de l'ensemble Z.

La proposition suivante permet de relier la u-dimension et la pression topologique.

Proposition 4.3.1. $\dim_u Z = \alpha$ *où* α *est l'unique réel tel que* $P_Z(-\alpha u) = 0$.

On peut aussi définir la u-dimension d'une probabilité. Soit $\nu \in \mathcal{P}(\mathbb{X})$, on pose :

$$\begin{aligned} \dim_{u,\mathcal{U}} \nu &= \inf\{\dim_{u,U} Z : \nu(Z) = 1\} \\ \text{et} \quad \dim_u \nu &= \lim_{\operatorname{diam} \mathcal{U} \to 0} \dim_{u,\mathcal{U}} \nu. \end{aligned}$$

Cette quantité est appelée la u-dimension de ν.

5 Étude de la bifurcation

Nous allons maintenant adapter à notre modèle certains résultats obtenus par G. Keller et A. Otani en 2013 [KO13]. Dans cet article, Keller et Otani étudient la bifurcation d'un graphe invariant obtenue par un système dynamique avec un produit croisé. Les résultats de cet article sont adaptables à l'exemple de la partie 1.3 entre autres grâce à la forme produit obtenue partie 2.2 ainsi qu'à l'identité (partie 3.2) :

$$\mathbb{E}_{\nu,\lambda}[\log \partial_s \varphi(x, 1)] = \lambda - \mathbb{E}_\nu[\cos 2\pi x] \text{ pour tout } \nu \in \mathcal{E}_T(\mathbb{R}/_{\mathbb{Z}}).$$

5.1 Paramètre de bifurcation

Soit $\mu_1 \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$. On note dans cette partie φ_{μ_1} la fonction génératrice associée à la loi de μ_1.
On peut munir $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ d'ordres partiels définit par :

- $\mu_1 \geq \mu_2$ si pour tout $s \in [0,1]$, $\varphi_{\mu_1}(s) \leq \varphi_{\mu_2}(s)$.
- $\mu_1 \succcurlyeq \mu_2$ s'il existe X,Y des variables aléatoires définit sur le même espace de probabilités tel que: $X \sim \mu_1$, $Y \sim \mu_2$ et $X \geq Y$ p.s. ou de manière équivalente pour tout $k \in \mathbb{N}, \mu_1([k,+\infty[) \geq \mu_2([k,+\infty[)$.

Lemme 5.1.1. *Si $\mu_1 \succcurlyeq \mu_2$ alors $\mu_1 \geq \mu_2$.*

Preuve. Si $\mu_1 \succcurlyeq \mu_2$ alors il existe X,Y des variables aléatoires définis sur le même espace de probabilités tel que: $X \sim \mu_1$, $Y \sim \mu_2$ et $X \geq Y$ p.s. Soit $s \in [0,1]$, $\varphi_{\mu_1}(s) = \mathbb{E}[s^X] \leq \mathbb{E}[s^Y] = \varphi_{\mu_2}(s)$. Ainsi $\mu_1 \geq \mu_2$. □

On peut aussi définir les ordres stricts associés :

- $\mu_1 > \mu_2$ si pour tout $s \in [0,1]$, $\varphi_{\mu_1}(s) \leq \varphi_{\mu_2}(s)$ et il existe $s_0 \in [0,1]$ tel que $\varphi_{\mu_1}(s_0) < \varphi_{\mu_2}(s_0)$.
- $\mu_1 \succ \mu_2$ s'il existe X,Y des variables aléatoires définit sur le même espace de probabilités tel que : $X \sim \mu_1$, $Y \sim \mu_2$, $X \geq Y$ p.s. et $\mathbb{P}(X = Y) < 1$ ou de manière équivalente pour tout $k \in \mathbb{N}, \mu_1([k,+\infty[) \geq \mu_2([k,+\infty[)$ et il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\mu_1([k_0,+\infty[) > \mu_2([k_0,+\infty[)$.

Si $\mu_1 \succ \mu_2$ alors $\mu_1 > \mu_2$. On remarque cependant que la réciproque est fausse. Si on prend $\mu_1 = \frac{1}{2}\delta_0 + \frac{1}{2}\delta_2$ et $\mu_2 = \delta_1$ alors $\mu_1 > \mu_2$ mais nous n'avons pas $\mu_1 \succ \mu_2$.

Comme dans l'exemple $x \mapsto 2x$, on peut considérer non plus une application μ de $\mathbb{X}$ à valeurs dans $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ mais une famille d'applications $\mu_{\lambda,\cdot}$ dépendant d'un paramètre λ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Dans la suite on considérera l'ordre partiel $\geq$ et l'ordre partiel strict associé $>$ et on imposera que la famille d'environnements soit strictement croissante suivant λ pour tout $x \in \mathbb{X}$. Cependant par les remarques précédentes, si une famille est croissante (respectivement strictement croissante) en lambda au sens de $\succcurlyeq$ (resp. $\succ$) alors elle est croissante (resp. strictement croissante) au sens de $\geq$ (resp. $>$). On remarque en particulier que le modèle de la transformation $x \mapsto 2x$ (partie 1.3) est bien strictement croissant en λ. En effet, pour tout $\lambda' \leq \lambda$, pour tout $x \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, une loi de Poisson de paramètre $e^{\lambda - \cos(2\pi x)}$ domine stochastiquement une loi de Poisson de paramètre $e^{\lambda' - \cos(2\pi x)}$.

On peut définir les objets $\varphi_\lambda, B_{\lambda,n}(x), B_\lambda(x), q_{\lambda,n}(x),\ q_\lambda(x), N_\lambda$ comme dans la partie 2.1 où la loi de reproduction est donnée par la fonction d'environnement $\mu_{\lambda,\cdot}$.

Pour $\lambda' \geq \lambda$, on a $q_\lambda(x) \leq q_{\lambda'}(x)$ pour tout $x \in [0,1]$ et donc $N_{\lambda'} \subset N_\lambda$. On notera alors:

$$N_\lambda^+ := \bigcup_{\lambda'>\lambda} N_{\lambda'} = \lim_{\lambda' \to \lambda^-} N_{\lambda'}$$

et

$$N_\lambda^- := \bigcap_{\lambda'<\lambda} N_{\lambda'} = \lim_{\lambda' \to \lambda^+} N_{\lambda'}.$$

On peut alors définir :

Définition 5.1.2. • *Soit* $x \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned}\lambda_C(x) :=& \sup\{\lambda \in \mathbb{R} : q_\lambda(x) = 1\} \\ =& \inf\{\lambda \in \mathbb{R} : q_\lambda(x) < 1\}\end{aligned}$$

• *Soit* $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$S_\lambda := \{x \in \mathbb{R}/\mathbb{Z} : \lambda_C(x) = \lambda\}$$

Pour $x \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, $\lambda_C(x)$ est le paramètre λ limite tel que $q_\lambda(x) < 1$ pour $\lambda > \lambda_C(x)$ et $q_\lambda(x) = 1$ pour $\lambda < \lambda_C(x)$. On obtient alors directement que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$S_\lambda = N_\lambda^- \setminus N_\lambda^+.$$

5.2 Caractérisation des ensembles N_λ et S_λ en termes d'exposants de Lyapunov

Proposition 5.2.1. *Soit* $\lambda \in \mathbb{R}$. *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *pour tout* $x \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, *pour tout* $t \in [0,1]$ *:*

$$\partial_s \varphi_\lambda^{(n)}(x,t) = \prod_{i=1}^{n} g_\lambda(T^{i-1}x)\varphi_\lambda^{(i)}(T^{n-i}x,t).$$

Preuve. Montrons ce résultat par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.
n=0. Soient $x \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ et $t \in [0,1]$.

$$\partial_s \varphi_\lambda^{(n)}(x,t) = 1$$

Supposons que la propriété est vraie jusqu'au rang $n \in \mathbb{N}$.
Soient $x \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ et $t \in [0,1]$.

$$\begin{aligned}
&\partial_s \varphi_\lambda^{(n+1)}(x,t) \\
=&\partial_s \varphi_\lambda(x, \varphi_\lambda^{(n)}(Tx,t)) \text{ par le Corollaire 2.1.4} \\
=&\partial_s \varphi_\lambda^{(n)}(Tx,t) \cdot \partial_s \varphi_\lambda(x, \varphi_\lambda^{(n)}(Tx,t)) \\
=&\prod_{i=1}^{n} g_\lambda(T^i x) \varphi_\lambda^{(i)}(T^{n-i+1}x,t) \cdot g_\lambda(x) \varphi_\lambda(x, \varphi_\lambda^{(n)}(Tx,t)) \\
&\quad \text{par relation de récurrence appliqué à } Tx \\
=&\prod_{i=1}^{n} g_\lambda(T^i x) \varphi_\lambda^{(i)}(T^{n+1-i}x,t) \cdot g_\lambda(x) \varphi_\lambda^{(n+1)}(x,t) \text{ par la relation de cocyle} \\
=&\prod_{i=1}^{n+1} g_\lambda(T^{i-1} x) \varphi_\lambda^{(i)}(T^{n+1-i}x,t).
\end{aligned}$$ □

Comme toute fonction génératrice des probabilités vaut 1 lorsqu'elle est prise en 1, alors on obtient directement le corollaire suivant :

Corollaire 5.2.2. *Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $x \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$,*

$$\partial_s \varphi_\lambda^{(n)}(x,1) = \prod_{i=1}^{n} g_\lambda(T^{i-1}x).$$

Ce corollaire est valable dans un cadre beaucoup plus large. En effet, il est valable pour tout processus de Galton-Watson en environnement dynamique et il s'exprime de manière probabiliste :

Proposition 5.2.3. *Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{X}$. Soit $(Z_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ un processus défini comme en partie 1.2. Alors,*

$$\mathbb{E}(Z_n(x)) = \prod_{i=0}^{n-1} \mathbb{E}(Y_{i,1}(x)).$$

La preuve est analogue à celle de la Proposition 5.2.1.

Preuve. Montrons ce résultat par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.
n=0. Soit $x \in \mathbb{X}$. Alors,

$$\mathbb{E}(Z_0(x)) = 1.$$

Supposons que la propriété est vraie jusqu'au rang $n \in \mathbb{N}$.
Soit $x \in \mathbb{X}$.

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}(Z_{n+1}(x)) \\
=&\partial_s \varphi^{(n+1)}(x,1). \\
=&\partial_s \varphi(x, \varphi^{(n)}(Tx,1)) \text{ par le Corollaire 2.1.4.} \\
=&\partial_s \varphi^{(n)}(Tx,1) \cdot \partial_s \varphi(x,1) \text{ car } \varphi^{(n)}(Tx,1) = 1. \\
=&\mathbb{E}(Z_n(Tx)) \cdot \mathbb{E}(Y_{0,1}). \\
=&\prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}(Y_{i,1}) \cdot \mathbb{E}(Y_{0,1}) \text{ par la relation de récurrence appliqué à } Tx. \\
=&\prod_{i=0}^{n} \mathbb{E}(Y_{i,1}).
\end{aligned}$$

□

Dans ce cadre plus général, l'espérance de la taille de la population à la n-ième génération est égale aux produits des espérances des lois de reproduction de chacune des générations précédentes.

Définition 5.2.4. *Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, pour tout $x \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, on définit $\Gamma_\lambda(x)$ par :*

$$\begin{aligned}
\Gamma_\lambda(x) :=& \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} -\log g_\lambda(T^i x) \\
=& \liminf_{n\to\infty} -\frac{1}{n} \log \left(\partial_s \varphi_\lambda^{(n)}(x,1) \right)
\end{aligned}$$

On pose pour tout $x \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, $\Gamma(x) = \Gamma_0(x)$.

$\Gamma_\lambda(x)$ correspond à la limite inférieure de la moyenne de Birkhoff de $-\log g_\lambda$.

On remarque dans le cadre de notre exemple que pour tout $x \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\Gamma_\lambda(x) = \Gamma(x) - \lambda.$$

Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, $0 < e^{\lambda-1} \leq g_\lambda \leq e^{\lambda+1}$. Donc pour tout $\nu \in \mathcal{E}_T(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$, on peut définir $\gamma_\lambda(\nu) = \int -\log g_\lambda \,\mathrm{d}\nu \in \mathbb{R}$ la moyenne spatiale de $-\log g_\lambda$.
Par le Théorème ergodique de Birkhoff, $\gamma_\lambda(\nu) = \Gamma_\lambda(x)$ pour ν-presque tout

x.
On pose pour tout $\nu \in \mathcal{E}_T(\mathbb{R}/_{\mathbb{Z}})$, $\gamma(\nu) = \gamma_0(\nu) = \mathbb{E}_\nu[\cos(2\pi x)]$.

Le Théorème suivant permet de caractériser les ensembles N_λ et S_λ à partir du signe de $\Gamma_\lambda(x)$.

Théorème 5.2.5. *[KO13, Théorème 1] Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}/_{\mathbb{Z}}$.*

- *Si $x \notin N_\lambda$ alors $\Gamma_\lambda(x) \geq 0$ (i.e. $\Gamma(x) \geq \lambda$).*
- *Si $x \in N_\lambda$ alors $\Gamma_\lambda(x) \leq 0$ (i.e. $\Gamma(x) \leq \lambda$).*
- *$\Gamma(x) = \lambda_C(x)$ et $S_\lambda = \{x \in \mathbb{R}/_{\mathbb{Z}} : \Gamma(x) = \lambda\} = \{x \in \mathbb{R}/_{\mathbb{Z}} : \Gamma_\lambda(x) = 0\}$.*

Preuve.

- Soit $x \in \mathbb{R}/_{\mathbb{Z}}$ tel que $\Gamma_\lambda(x) < 0$. Alors il existe $\delta > 0$ tel que $\liminf\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} -\log g_\lambda(T^i x) < \delta$. Ainsi, il existe une suite $(n_j)_{j\in\mathbb{N}}$ strictement croissante à valeurs dans $\mathbb{N}$ tel que pour tout $j \in \mathbb{N}$, $\partial_s \varphi_\lambda^{(n_j)}(x,1) = \prod_{i=0}^{n_j-1} g_\lambda(T^i x) \leq \exp(-\delta n_j)$. Soit $j \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} q_\lambda(x) &\geq q_{\lambda,n_j}(x) \text{ car } q_{\lambda,n_j}(x) \nearrow_j q_\lambda(x). \\ &\geq \varphi_\lambda^{(n_j)}(x,0) \text{ par définition de } \varphi_\lambda^{(n_j)}. \\ &\geq 1 - \sup_{t\in[0,1]} \partial_s \varphi_\lambda^{(n_j)}(x,s) \text{ par convexité.} \\ &\geq 1 - \partial_s \varphi_\lambda^{(n_j)}(x,1) \text{ car } \varphi_\lambda^{(n_j)}(x,t) \text{ est croissant en t.} \\ &\geq 1 - \exp(-\delta n_j) \xrightarrow[j\to\infty]{} 1. \end{aligned}$$

  Ainsi $x \in N_\lambda$.

- Soit $x \in \mathbb{R}/_{\mathbb{Z}}$ tel que $\Gamma_\lambda(x) > 0$, alors il existe $N \in \mathbb{N}^*$ et $\delta > 0$ tel que pour tout $n \geq N$, $\prod_{i=1}^n g_\lambda(T^{i-1}x) \geq e^{\delta n}$. Donc pour tout $n < N$, $\prod_{i=1}^n g_\lambda(T^{i-1}x) > 0$. Alors il existe $0 < C < 1$, tel que pour tout $n < N$, $\prod_{i=1}^n g_\lambda(T^{i-1}x) \geq C$. Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\prod_{i=1}^n g_\lambda(T^{i-1}x) \geq Ce^{\delta n} \tag{1}$$

  On suppose de plus par l'absurde que $q_\lambda(x) = 1$. Il existe alors $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $q_{\lambda,n_0}(x) > e^{-\delta}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $k(n) = \max\{k \leq n : \varphi_\lambda^{(k)}(T^{n-k}x, 0) \leq e^{-\delta}\}$.
On remarque que si $n \geq n_0$ alors $k(n) < n$.
Soit $n \geq n_0$, soit $1 \leq i \leq n - k(n)$,

$$\begin{aligned}\varphi_\lambda^{(i)}(T^{n-k(n)-i}x, e^{-\delta}) \geq\ & \varphi_\lambda^{(i)}(T^{n-k(n)-i}x, \varphi_\lambda^{(k(n))}(T^{n-k(n)}x, 0)) \\ & \text{par définition de } k(n) \\ =\ & \varphi_\lambda^{(i+k(n))}(T^{n-k(n)-i}x, 0) \text{ par la relation de cocyle} \\ \geq\ & e^{-\delta} \text{ car } i + k(n) > k(n).\end{aligned} \tag{2}$$

Soit $n \geq n_0$,

$$\begin{aligned}1 - q_{\lambda,n}(x) =& 1 - \varphi_\lambda^{(n)}(x, 0) \\ =& 1 - \varphi_\lambda^{(n-k(n))}(x, \varphi_\lambda^{(k(n))}(T^{n-k(n)}x, 0)) \\ & \quad \text{par la relation de cocyle} \\ \geq& 1 - \varphi_\lambda^{(n-k(n))}(x, e^{-\delta}) \text{ par définition de } k(n) \\ =& \int_{e^{-\delta}}^1 \partial_s \varphi_\lambda^{(n-k(n))}(x, s)\, \mathrm{d}t \\ =& \int_{e^{-\delta}}^1 \prod_{i=1}^{n-k(n)} g_\lambda(T^{i-1}x) \varphi_\lambda^{(i)}(T^{n-k(n)-i}x, t)\, \mathrm{d}t \\ & \quad \text{par la Proposition 5.2.1} \\ \geq& C e^{\delta(n-k(n))}(1 - e^{-\delta}) \prod_{i=1}^{n-k(n)} \varphi_\lambda^{(i)}(T^{n-k(n)-i}x, e^{-\delta}) \text{ par (1)} \\ & \quad \text{et par croissance de la fonction } \varphi_\lambda^{(i)}(T^{n-k(n)-i}x, .) \\ \geq& C e^{\delta(n-k(n))}(1 - e^{-\delta}) e^{-\delta(n-k(n))} \text{ par (2)} \\ =& C(1 - e^{-\delta}) > 0.\end{aligned}$$

Ainsi $x \notin N_\lambda$.

- C'est une conséquence directe des 2 premiers points. □

En général, pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on n'a pas $S_\lambda \subset N_\lambda$. On va donc chercher à étudier $S_\lambda \backslash N_\lambda$.

Proposition 5.2.6. *[KO13, Proposition 1] Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, soit $x \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Alors $x \in S_\lambda \backslash N_\lambda$ si et seulement si il existe une sous suite $(l_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{N}$ tel que $\sum_{k=1}^{l_i} -\log(q_\lambda(T^i x)) + \log(-\log(q_\lambda(T^{l_i}x))) = o(l_i)$.*

Preuve. On pose $h(s) = 1 - e^{-s}$. h est bien une fonction $\mathcal{C}^1$, strictement concave tel que $h(0) = 0$, $h'(x) > 0$ pour $x > 0$, $h'(0) = 1$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{h(x)}{x} = 0$. On applique alors la preuve de [KO13, Proposition 1] en utilisant le tableau de correspondance suivant :

$\varphi_t(\theta)$	$-\log q_\lambda(x)$
$\psi_{t,n}(\theta)$	$-\log q_{\lambda,n}(x)$

□

Cette proposition qui caractérise l'ensemble $S_\lambda \backslash N_\lambda$ permet d'obtenir les trois corollaires suivants :

Corollaire 5.2.7. *[KO13, Corollaire 1] Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, pour tout $\nu \in \mathcal{P}_T(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$, $\nu(S_\lambda \backslash N_\lambda) = 0$.*

Preuve. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\nu \in \mathcal{P}_T(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$. Comme $S_\lambda \backslash N_\lambda$ est T-invariant et que $0 \leq -\log q_\lambda(x) \leq e^{\lambda+1}$ alors la Proposition 5.2.6 implique que

$$\int_{S_\lambda \backslash N_\lambda} -\log(q_\lambda)\,\mathrm{d}\mu = \lim_{i\to\infty} \int_{S_\lambda \backslash N_\lambda} \frac{1}{l_i} \sum_{k=1}^{l_i} -\log(q_\lambda(T^k x)\,\mathrm{d}\mu = 0.$$

De plus, comme $-\log(q_\lambda) > 0$ sur $S_\lambda \backslash N_\lambda$ alors $\nu(S_\lambda \backslash N_\lambda) = 0$. □

Corollaire 5.2.8. *[KO13, Corollaire 2] Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, pour tout $\nu \in \mathcal{P}_T(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$:*

- *si $\nu(N_\lambda) = 0$ alors $\gamma_\lambda(\nu) > 0$ i.e. $\gamma(\nu) > \lambda$.*
- *si $\nu(N_\lambda) = 1$ alors $\gamma_\lambda(\nu) \leq 0$ i.e. $\gamma(\nu) \leq \lambda$.*
- *Si ν est ergodique, alors les deux premiers points sont des équivalences et de plus, $\nu(S_\lambda) = 1$ pour $\lambda = \gamma(\nu)$ et $\nu(S_\lambda) = 0$ sinon.*

Preuve. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\nu \in \mathcal{P}_T(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$.

- Supposons $\nu(N_\lambda) = 0$. Alors $x \notin N_\lambda$ pour ν-presque tout x alors par le Théorème 5.2.5 $\Gamma_\lambda(x) \geq 0$ pour ν-presque tout x. De plus, $\nu(S_\lambda) = \nu(S_\lambda \backslash N_\lambda) = 0$ par le Corollaire 5.2.7. Ainsi par le Théorème 5.2.5, $\Gamma_\lambda(x) > 0$ pour ν-presque tout x. Donc $\gamma_\lambda(\nu) > 0$.
- Supposons $\nu(N_\lambda) = 1$. Alors $x \in N_\lambda$ pour ν-presque tout x alors par le Théorème 5.2.5 $\Gamma_\lambda(x) \leq 0$ pour ν-presque tout x. Donc $\gamma_\lambda(\nu) \leq 0$.

- Supposons maitenant que ν est ergodique. Les deux premiers points sont des équivalences car $\nu(N_\lambda) \in \{0,1\}$. De plus, $\nu(S_\lambda) = 1$ si $\lambda = \gamma(\nu)$ et $\nu(S_\lambda) = 0$ sinon par le Théorème 5.2.5. $\square$

Dans le cas où ν est ergodique, on retrouve dans le Corollaire 5.2.8 les résultats d'Athreya et Karlin énoncés dans le Corollaire 3.1.2 et le Théorème 3.1.3.

Définition 5.2.9. *On définit :*

- $\lambda_{min} = \inf_{\nu \in \mathcal{P}_T(\mathbb{X})} \gamma(\nu)$.
- $\lambda_{max} = \sup_{\nu \in \mathcal{P}_T(\mathbb{X})} \gamma(\nu)$.

Comme les probabilités ergodiques sont les points extrémaux de l'ensemble convexe des probabilités T-invariantes, on aurait pu remplacer $\mathcal{P}_T(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ par $\mathcal{E}_T(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ dans les définitions précédentes. Dans le cadre de notre exemple, on a montré dans la partie 3.2 que $\lambda_{\min} = -\frac{1}{2}$ et $\lambda_{\max} = 1$.

On note pour $n \in \mathbb{N}$, $\Gamma^{(n)}(x) = -\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \log g(T^i x)$.

Définition 5.2.10. *Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on définit :*

$$\begin{aligned} S'_\lambda =& \{x \in \mathbb{R}/\mathbb{Z} : \lim_{n\to\infty} \Gamma^{(n)}(x) = \lambda\} \\ \textit{et } R'_\lambda =& \{x \in \mathbb{R}/\mathbb{Z} : \textit{il existe une sous-suite } (n_k)_{k\in\mathbb{N}} \textit{ où } \lim_{k\to\infty} \Gamma^{(n_k)}(x) = \lambda\}. \end{aligned}$$

On a pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $S'_\lambda \subset S_\lambda \subset R'_\lambda$.

Corollaire 5.2.11. *[KO13, corollaire 3] Pour tout $\nu \in \mathcal{E}_T(\mathbb{X})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$: $\nu(S_\lambda \backslash S'_\lambda) = 0$ et $\nu(R'_\lambda \backslash S_\lambda) = 0$.*

Preuve. Soient $\nu \in \mathcal{E}_T(\mathbb{X})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Par le Théorème 5.2.5, le Corollaire 5.2.8 et le Théorème ergodique de Birkhoff : $\nu(R'_\lambda) = \nu(S_\lambda) = \nu(S'_\lambda) = 1$ si $\lambda = \gamma(\nu)$ et $\nu(R'_\lambda) = \nu(S_\lambda) = \nu(S'_\lambda) = 0$ sinon. $\square$

5.3 Dimension de N_λ et S_λ

On a vu dans le tableau de la partie 3.2 que pour $\lambda \in]\lambda_{\min}, \lambda_{\max}[$, il existe $\nu_0, \nu_1 \in \mathcal{E}_T(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ tel que $\nu_0(N_\lambda) = 0$ et $\nu_1(N_\lambda) = 1$. En particulier pour $\lambda \in]\lambda_{\min}, \lambda_{\max}[$, l'ensemble N_λ n'est pas trivial c'est à dire $N_\lambda \neq \emptyset$ et $N_\lambda \neq \mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

On va alors donner plus d'informations sur N_λ en calculant sa dimension de packing et de Hausdorff.

On pose :

$$\begin{aligned} D :]-\frac{1}{2},1[&\to [0,1] \\ \lambda &\mapsto \max\left\{\frac{h_T(\nu)}{\log 2} : \nu \in \mathcal{P}_T(\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \text{ et } \int \cos(2\pi x)\,\mathrm{d}\nu(x) = \lambda\right\}. \end{aligned}$$

D est bien définie car :

- par définition de $\lambda_{\min} = -\frac{1}{2}$ et $\lambda_{\max} = 1$ et comme $\mathcal{P}_T(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ est convexe dans $\mathcal{P}(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$, pour tout $\lambda \in]\gamma_{\min}, \gamma_{\max}[$, il existe $\nu \in \mathcal{P}_T(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ tel que $\int \cos(2\pi x)\,\mathrm{d}\nu(x) = \lambda$.
- $h_T(\nu) \leq h_{top}(T) = \log 2$.

Définition 5.3.1. *Soit T est une transformation $\mathcal{C}^1$ d'un espace $\mathbb{X}$ lisse. Soit $J \in \mathbb{X}$ un sous espace compact et T-invariant ($T^{-1}J = J$).*
On dit que T est dilatante sur J si $\|d_x f\| > 1$ pour tout $x \in J$.

Dans notre exemple, T est dilatante sur $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. La fonction $\nu \in \mathcal{P}_T(\mathbb{X}) \mapsto h_\nu(T)$ est semi-continue supérieurement car T est $\mathcal{C}^\infty$ et $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ est une sous variété lisse compacte par [New89, Théorème 4.1]. On note $\mathcal{D}(\mathbb{X})$ l'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{X}$ dans $\mathbb{R}$ qui ont une unique mesure d'équilibre. Soient $\psi, \phi : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ des fonctions hölderiennes. L'application $t \mapsto P(t\phi + \psi)$ est réelle analytique et strictement convexe si ϕ n'est pas cohomologue à une constante par [PP90, propositions 4.8 et 4.12].

Lemme 5.3.2. *Vect*$(\log 2, \log g) \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$.

Preuve. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, montrons que $\alpha \log 2 + \beta \log g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$. On pose $\tilde{g} = 2^\alpha + g^\beta : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{R}_+^*$. La transformation T est positivement expansive pour la constante $\frac{1}{4}$ car si $d(T^k x, T^k y) \leq \frac{1}{4}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ alors $x = y$. De plus T satisfait la propriété de spécification, c'est à dire que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier p tel que lorsque qu'on se donne l points, $x_1, ..., x_l \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ et des entiers $n_1, ..., n_l > 0$ et $p_1, ..., p_l \geq p$ alors il existe $z \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ tel que $d(T^{m(j-1)+i}z, T^i x_j) \leq \varepsilon$ avec $m(j) = \sum_{k=1}^{j} n_k + p_k$ pour $i = 0, ..., n_j - 1$ et $j = 1, ..., l$. Ces deux conditions sont appelées les conditions de Bowen.

Montrons que $\log \tilde{g} = \alpha \log 2 + \beta \log g \in \mathcal{V}(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ où $\mathcal{V}(\mathbb{R}/\mathbb{Z}) = \{f : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{R} : K_f = \sup K_f(n) < \infty\}$ et $K_f(n) = \sup\{|\sum_{k=0}^{n-1} f(T^k x) - f(T^k y)| : y \in$

$\mathcal{B}_n(x,\varepsilon)\}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme T est positivement expansive pour la constante $\frac{1}{4}$, on pose $Var_n(f) = \sup\{|f(x) - f(y)| : y \in \mathcal{B}_n(x, \frac{1}{4})\}$. Or $Var_n(\log \tilde{g}) \leq |\beta| \left(\frac{1}{4}\right)^n$. Et donc par [Bal00, Lemme 1.4] $\log \tilde{g} \in \mathcal{V}(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ car $\sum_{n=0}^{\infty} Var_n(\log \tilde{g}) < \infty$. On peut alors appliquer [Bal00, Théorème 1.9] qui assure l'existence d'une unique mesure d'équilibre associée à $\log \tilde{g}$, i.e. $\mathrm{Vect}(\log 2, \log g) \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$. $\square$

On a par définition: $\mathrm{int}(\gamma(\mathcal{P}(\mathbb{X}))) =]-\frac{1}{2}, 1[$.

Nous allons maintenant prouver le Théorème [KO13, Théorème 2] dans le cas de notre exemple.

Théorème 5.3.3. *[KO13, Théorème 2] On a :*

$$\dim_H(S_\lambda) = \dim_P(\mathbb{R}/\mathbb{Z} \backslash N_\lambda) = \dim_H(\mathbb{R}/\mathbb{Z} \backslash N_\lambda) = D(\lambda) \text{ pour } \lambda \in]-\frac{1}{2}, 0].$$
$$\dim_H(S_\lambda) = \dim_H(N_\lambda) = D(\lambda) \text{ pour } \lambda \in [0, 1[.$$

De plus, D est une fonction réelle analytique avec $D(0) = 1$, $D"(0) < 0$ et

$$D'(\lambda) = \begin{cases} > 0 & si\ \lambda \in]-\frac{1}{2}, 0[\\ < 0 & si\ \lambda \in]0, 1[\end{cases}.$$

De plus, il existe une unique mesure d'équilibre $\nu_\lambda \in \mathcal{E}_T(\mathbb{X})$ tel que $D(\lambda) = \frac{h_T(\nu_\lambda)}{\log 2}$, $\nu_\lambda(S_\lambda) = 1$ et $\dim_H(\nu_\lambda) = D(\lambda)$.

Pour prouver ce Théorème, nous allons commencer par montrer 4 lemmes préliminaires.

Lemme 5.3.4. *[KO13, Lemme 2] $\dim_H(S'_\lambda) = D(\lambda)$ pour $\lambda \in]-\frac{1}{2}, 1[$. De plus, il existe une fonction réelle analytique $p :]-\frac{1}{2}, 1[\to \mathbb{R}$ tel que pour l'unique mesure l'équilibre $\nu_\lambda \in \mathcal{E}_T(\mathbb{X})$ du potentiel $p(\lambda)\log g_\lambda - D(\lambda)\log 2$, on ait :*

$$\nu_\lambda(S_\lambda) = 1, \qquad D(\lambda) = \frac{h_T(\nu_\lambda)}{\log 2} \text{ et } \qquad \dim_H(\nu_\lambda) = D(\lambda).$$

Preuve. L'entropie métrique de T est semi-continue inférieurement et $Vect(\log 2, \log g) \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ par le Lemme 5.3.2. On peut alors appliquer [Bar08, Théorème 10.1.4]. De plus, comme T est expansive sur $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ et $\mathcal{C}^\infty$, on peut appliquer le résultat de [Bar08, Exemple 7.2.5] et on obtient que $\dim_H(S'_\lambda) = \dim_{\log 2}(S'_\lambda)$. On obtient alors en particulier que pour tout

$\lambda \in]-\frac{1}{2}, 1[$, $\dim_{\log 2}(S'_\lambda) = D(\lambda)$.
On pose $F_\lambda(p) = P(p \log g_\lambda - \dim_H S'_\lambda \log 2)$. Cette fonction atteint son minimum en un unique point que l'on note alors $p(\lambda)$. On note alors $\nu_\lambda \in \mathcal{E}_T(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ l'unique mesure d'équilibre de la fonction $p(\lambda)\log g_\lambda - \dim_H(S'_\lambda)\log 2$. Et $\nu_\lambda(S'_\lambda) = 1$, $\dim_{\log 2}\nu_\lambda = \frac{h_T(\nu_\lambda)}{\log 2} = \dim_{\log 2}(S'_\lambda)$. On a aussi $D(\lambda) = \frac{h_T(\nu_\lambda)}{\log 2}$. Et par l'exemple [Bar08, 7.2.5], $\dim_{\log 2}\nu_\lambda = \dim_H \nu_\lambda$. De plus par [Bar08, Théorème 10.3.1], p est une fonction analytique. $\square$

Lemme 5.3.5. *[KO13, Lemme 3] D est une fonction analytique réelle tel que $D(0) = 1$, $D"(0) < 0$ et*

$$D'(\lambda) = \begin{cases} > 0 & si\ \lambda \in]-\frac{1}{2}, 0[\\ < 0 & si\ \lambda \in]0, 1[\end{cases}.$$

Preuve. Cette preuve est tirée de [KO13, Lemme 3], elle même adaptée de [Bar08, 10.3.1]. On considère la fonction réelle analytique $Q(\delta, p, \lambda) = P(p(\cos 2\pi x - \lambda) - \delta \log 2)$. Par [Bar08, 10.3.1], le système d'équations :

$$\begin{cases} Q(D(\lambda), p(\lambda), \lambda) = 0 \\ \frac{\partial Q}{\partial p}(D(\lambda), p(\lambda), \lambda) = 0 \end{cases}. \tag{3}$$

détermine une fonction réelle analytique $(D, p) :]-\frac{1}{2}, 1[\to \mathbb{R}^2$. Ces équations sont équivalentes à :

$$\begin{cases} h_T(\nu_\lambda) + \nu_\lambda(p(\lambda)\cos(2\pi x)) = p(\lambda)\lambda + D(\lambda)\log 2 \\ \nu_\lambda(\cos(2\pi x)) = \lambda \end{cases}. \tag{4}$$

en utilisant ν_λ la mesure d'équilibre définie dans le lemme précédent.

Dans la suite de cette preuve, toutes les dérivées de Q, seront prises en $(D(\lambda), p(\lambda), \lambda)$. On peut dériver par rapport à t, la première ligne de (3), et on obtient :

$$D'(\lambda) = \frac{p(\lambda)}{\frac{\partial Q}{\partial \delta}}. \tag{5}$$

Puis la seconde et en substituant $D'(\lambda)$ grâce à (5), on a :

$$p'(\lambda) = \frac{1}{\frac{\partial^2 Q}{\partial p^2}} \left(1 - p(\lambda)\frac{\frac{\partial^2 Q}{\partial \delta \partial p}}{\frac{\partial Q}{\partial \delta}}\right). \tag{6}$$

Par (3) et comme $D(0) = \frac{h_T(m)}{\log 2} = 1$ alors $Q(D(0), p(0), 0) = P(p(0)\cos(2\pi x) - \log 2) = 0$. Ainsi par la Proposition 4.2.3, $P(p(0)\cos(2\pi x)) = \log 2$. De plus, $P(0) = h_{top}(T) = \log 2$. On obtient alors que $p(0) = 0$.

Ainsi par (5), $D'(0) = 0$. On dérive alors l'expression (5) et on obtient :

$$D"(\lambda) = \frac{p'(\lambda)}{\frac{\partial Q}{\partial \delta}} - p(\lambda)\frac{D'(\lambda)\frac{\partial^2 Q}{\partial \delta^2} + p'(\lambda)\frac{\partial^2 Q}{\partial \delta \partial p} + \frac{\partial^2 Q}{\partial \delta \partial \lambda}}{(\frac{\partial Q}{\partial \delta})^2} \tag{7}$$

Or $\frac{\partial^2 Q}{\partial \delta \partial \lambda}(D(\lambda), p(\lambda), \lambda) = 0$ car $Q(D(\lambda), p(\lambda), \lambda) = 0$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$. Et avec (5), on obtient :

$$D"(\lambda) = \frac{1}{\frac{\partial Q}{\partial \delta}}\left(p'(\lambda) - D'(\lambda)\left(D'(\lambda)\frac{\partial^2 Q}{\partial \delta^2} + p'(\lambda)\frac{\partial^2 Q}{\partial \delta \partial p}\right)\right).$$

Or la fonction $p \to Q(\delta, p, \lambda)$ est strictement convexe car $\cos(2pix)$ n'est pas cohomologue à une constante. On obtient alors par (6) que:

$$p'(0) = \frac{1}{\frac{\partial^2 Q}{\partial p^2}(1, 0, 0)} > 0, \tag{8}$$

et par (8) que :

$$D"(0) = \frac{p'(\lambda)}{\frac{\partial Q}{\partial \delta}} = -\frac{p'(\lambda)}{\log 2} < 0. \tag{9}$$

On considère maintenant $C :]\lambda_{\min}, \lambda_{\max}[\to [0,1] \times \mathbb{R}$ définie par $C(\lambda) = (D(\lambda), q(\lambda))$. Cette fonction vaut (1,0) pour $\lambda = 0$. Comme $\mathrm{sign}(D'(\lambda))= \mathrm{sign}(q(\lambda))$ par (5), $D(\lambda)$ peut changer de signe seulement si $p(\lambda) = 0$. Or si $p(\lambda) = 0$ alors $P(0) = D(\lambda)\log 2$ donc $D(\lambda) = 1$ (car $P(0) = h_{top}(T)$) i.e. $\lambda = 0$. Comme $D"(0) < 0$, $D'(0) = 0$ et que D' ne peut changer de signe qu'en $\lambda = 0$ alors on obtient que $D'(\lambda) > 0$ pour $\lambda \in]-\frac{1}{2}, 0[$ et $D'(\lambda) < 0$ pour $\lambda \in]0, 1[$. $\square$

Soit $\eta \in \mathcal{P}(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$, on définit pour $x \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$:

$$\overline{d}_\eta(x) = \limsup_{r \to 0} \frac{\log \eta(B(x,r))}{\log r},$$
$$\text{et } \underline{d}_\eta(x) = \liminf_{r \to 0} \frac{\log \eta(B(x,r))}{\log r}.$$

Si $\overline{d}_\eta(x) = \underline{d}_\eta(x)$, on note $d_\eta(x) = \lim\limits_{r\to 0} \frac{\log \eta(B(x,r))}{\log r}$.

Par exemple, pour tout $x \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, $d_m(x) = 1$ où m est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

Si $\eta \in \mathcal{P}(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ est une mesure à support fini alors,

$$d_\eta(x) = +\infty \text{ si } x \in \operatorname{supp}(\eta).$$
$$d_\eta(x) = 0 \text{ sinon.}$$

On définit aussi les ensembles :

$$N_\lambda^{\geq} = \{x \in \mathbb{R}/\mathbb{Z} : \Gamma(x) \geq \lambda\}$$
$$\text{et, } N_\lambda^{\leq} = \{x \in \mathbb{R}/\mathbb{Z} : \limsup_{n\to\infty} \Gamma^{(n)}(x) \leq \lambda\}.$$

Lemme 5.3.6. *[KO13, Lemme 4] Soit $\lambda \in]-\frac{1}{2}, 1[$. Il existe $\eta_\lambda \in \mathcal{P}(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ telle que $\eta_\lambda(S'_\lambda) = 1$ et :*

1. *$d_{\eta_\lambda}(x) = D(t)$ pour η_λ-presque tout $x \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$,*
2. *$\overline{d}_{\eta_\lambda}(x) \leq D(\lambda)$ pour tout $x \in S'_\lambda$,*
3. *$\underline{d}_{\eta_\lambda}(x) \leq D(\lambda)$ pour tout $x \in R'_\lambda$,*
4. *$\overline{d}_{\eta_\lambda}(x) \leq D(\lambda)$ pour tout $x \in N_\lambda^{\leq}$ si $\lambda \in]0, 1[$ et*
5. *$\underline{d}_{\eta_\lambda}(x) \leq D(\lambda)$ pour tout $x \in N_\lambda^{\geq}$ si $\lambda \in]-\frac{1}{2}, 0[$.*

Preuve. Pour la preuve de ce lemme, nous ne pouvons ni utiliser l'article [KO13], ni la référence qu'ils utilisent [Bar08, Lemme 12.3.3 et Théorème 12.3.1] car notre transformation T n'est pas inversible.

Néanmoins nous pouvons obtenir la preuve du lemme grâce à [PW97, Lemme II.2] qui ne nécessite pas l'inversibilité de T. $\square$

Lemme 5.3.7. *[KO13, Lemme 5] Pour $\lambda \in]-\frac{1}{2}, 1[$, on a :*

$$\dim_H(S'_\lambda) = \dim_H(R'_\lambda) = \dim_P(S'_\lambda) = D(\lambda).$$
$$\textit{De plus, } \dim_H(N_\lambda^{\geq}) = D(\lambda) \ \textit{ pour } \lambda \in]-\frac{1}{2}, 0]$$
$$\textit{et } \dim_P(N_\lambda^{\leq}) = D(\lambda) \ \textit{ pour } \lambda \in [0, 1[.$$

Preuve. Soit $\lambda \in]-\frac{1}{2}, 1[$, on considère η_λ définit dans le lemme précédent. Par [Bar08, Théorème 2.15], comme $d_{\eta_\lambda}(x) = D(t)$ pour η_λ-presque tout $x \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ et $\eta_\lambda(S'_\lambda) = 1 = \eta_\lambda(R'_\lambda)$ (car $S'_\lambda \subset R'_\lambda$) alors $\dim_H(S'_\lambda) \geq D(\lambda)$ et $\dim_H(R'_\lambda) \geq D(\lambda)$. Or par la Proposition 4.1.2, $D(\lambda) \leq \dim_H(S'_\lambda) \leq \dim_P(S'_\lambda)$. De plus par [Fal97, Proposition 2.5], comme $\overline{d}_{\eta_\lambda}(x) \leq D(\lambda)$ pour tout $x \in S'_\lambda$ et $\underline{d}_{\eta_\lambda}(x) \leq D(\lambda)$ pour tout $x \in R'_\lambda$ alors $\dim_H(S'_\lambda) \leq \dim_P(S'_\lambda) \leq D(\lambda)$ et $\dim_H(R'_\lambda) \leq D(\lambda)$.

Si $\lambda \in]0, \lambda_{\max}[$, comme $\overline{d}_{\eta_\lambda}(x) \leq D(\lambda)$ pour tout $x \in N_\lambda^{\geq}$ alors par [Fal97, Proposition 2.5], $\dim_P(N_\lambda^{\geq}) \leq D(\lambda)$, la propriété reste vraie pour $\lambda = 0$ car $D(0) = 1$ et $\dim_P(\mathbb{R}/\mathbb{Z}) = \dim_H(\mathbb{R}/\mathbb{Z}) = 1$. De plus comme $S'_\lambda \subset N_\lambda^{\geq}$, par le [Bar08, Théorème 2.15], comme $d_{\eta_\lambda}(x) = D(t)$ pour η_λ presque tout $x \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, $\dim_P(N_\lambda^{\geq}) \geq \dim_H(N_\lambda^{\geq}) \geq D(\lambda)$.

Si $\lambda \in]-\frac{1}{2}, 0[$, comme $\underline{d}_{\eta_\lambda}(x) \leq D(\lambda)$ pour tout $x \in N_\lambda^{\leq}$ alors par [Fal97, Proposition 2.5], $\dim_H(N_\lambda^{\leq}) \leq D(\lambda)$, la propriété reste vraie pour $\lambda = 0$ car $D(0) = 1$. De plus comme $S'_\lambda \subset N_\lambda^{\leq}$, par [Bar08, Théorème 2.15], comme $d_{\eta_\lambda}(x) = D(t)$ pour η_λ presque tout $x \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, $\dim_P(N_\lambda^{\leq}) \geq D(\lambda)$. □

On peut maintenant prouver le Théorème 5.3.3.

Preuve. Comme $S'_\lambda \subset S_\lambda \subset R'_\lambda$ alors $\dim_H(S_\lambda) = D(\lambda)$ pour $\lambda \in]-\frac{1}{2}, 1[$ par le lemme précédent.

Soit $\lambda \in]-\frac{1}{2}, 0]$, $D(\lambda) = \lim_{\lambda' \nearrow \lambda} D(\lambda') = \lim_{\lambda' \nearrow \lambda} \dim_H(S_{\lambda'}) \leq$
$\dim_H(\mathbb{R}/\mathbb{Z} \backslash N_\lambda)$ car D est continue (Lemme 5.3.5) et $S_{\lambda'} \subset \mathbb{R}/\mathbb{Z} \backslash N_\lambda$ pour $\lambda' < \lambda$. De plus par le Théorème 5.2.5, $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \backslash N_\lambda \subset \{\Gamma_\lambda \geq 0\} = N_\lambda^{\geq}$. Donc $\dim_H(\mathbb{R}/\mathbb{Z} \backslash N_\lambda) \leq \dim_P(\mathbb{R}/\mathbb{Z} \backslash N_\lambda) \leq \dim_P(N_\lambda^{\geq}) = D(\lambda)$. Ainsi
$\dim_H(\mathbb{R}/\mathbb{Z} \backslash N_\lambda) = \dim_P(\mathbb{R}/\mathbb{Z} \backslash N_\lambda) = D(\lambda)$.

Soit $\lambda \in [0, 1[$, $D(\lambda) = \lim_{\lambda' \searrow \lambda} D(\lambda') = \lim_{\lambda' \searrow \lambda} \dim(S_{\lambda'}) \leq \dim_H(N_\lambda)$ car D est continue (Lemme 5.3.5) et $S_{\lambda'} \subset N_\lambda$ pour $\lambda' > \lambda$. De plus par le Théorème 5.2.5 et comme $\log g$ est borné, $N_\lambda \subset \{\Gamma_\lambda \leq 0\} \subset N_\lambda^{\leq} \cup R'_\lambda$. Donc $\dim_H(N_\lambda) \leq \max\{\dim_H(N_\lambda^{\leq}), \dim_H(R'_\lambda)\} = D(\lambda)$, ainsi $\dim_H(N_\lambda) = D(\lambda)$. □

Proposition 5.3.8. *[KO13, Corollaire 5]* $\dim_P(N_\lambda) = 1$ *pour* $\lambda \in]0, 1[$.

Avant de prouver cette proposition, nous avons besoin de quelques informations sur les espaces de Baire [Sch70, chapitre XXI]. Une des définitions d'un espace de Baire est qu'un espace topologique est de Baire si toute union dénombrable de fermés d'intérieurs vides est d'intérieur vide. Le lemme de

Baire nous donne des conditions nécessaires pour être de Baire. En particulier, tout espace localement compact est de Baire. $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ est compact (donc localement compact), c'est ainsi un espace de Baire.

On définit aussi un espace maigre par : E est dit maigre lorsqu'il est contenu dans une réunion dénombrable de fermés de E qui sont tous d'intérieur vide. Si E est maigre, on dit que son complémentaire est comaigre. Dans un espace B de Baire, on vérifie facilement :

- qu'une partie de B est comaigre dans B si et seulement si elle contient un G_δ dense.

- qu'une partie de B qui est comaigre dans B ne peut pas être maigre dans B (on dit qu'elle est de deuxième catégorie). En effet, sinon B s'écrirait comme une réunion dénombrable de fermés de B qui sont tous d'intérieur vide et comme B de Baire alors B serait d'intérieur vide dans lui-même, ce qui est absurde.

Passons donc maintenant à la preuve de la Proposition 5.3.8. On retrouve les arguments de cette preuve dans [Orp15] (dans le paragraphe après la proposition 2.3).

Preuve. On a vu que N_λ est soit vide, soit un G_δ dense dans le Corollaire 2.2.1. Or pour $\lambda \in]0,1[$, N_λ n'est pas vide.

Par la Proposition 4.1.3, $\dim_P N_\lambda = \inf\{\sup_i \overline{\dim}_B(F_i) : N_\lambda \subset \cup_{i\in\mathbb{N}} F_i\}$ où l'inf est pris sur tous les recouvrement fermés dénombrables de N_λ. Considérons un tel recouvrement, alors $\cup_{i\in\mathbb{N}} F_i$ est comaigre car N_λ est un G_δ dense. Donc $\cup_{i\in\mathbb{N}} F_i$ n'est pas maigre c'est à dire qu'il existe $i \in \mathbb{N}$ tel que $\mathrm{int}(F_i) \neq \emptyset$. Donc il existe $x \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ et $r > 0$ tel que $\mathcal{B}(x,r) \subset \mathrm{int}(F_i)$. En particulier, $1 = \overline{\dim}_B \mathcal{B}(x,r) \leq \overline{\dim}_B F_i$. Ainsi $\dim_P N = 1$. $\square$

On a donc directement par le Théorème 5.3.3 et la Proposition 5.3.8 que $\dim_P(N_\lambda) = 1 > D(\lambda) = \dim_H(N_\lambda)$ pour $\lambda \in]0,1[$. En particulier cela nous donne des exemples où la dimension de packing et celle de Hausdorff ne coïncident pas.

On peut aussi définir l'ensemble $\mathcal{A}_\lambda = \{(x,s) \in \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times [0,1] : q_\lambda(x) \leq s \leq 1\}$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$.

Théorème 5.3.9. *[KO13, Théorème 3] On a :*

$$\dim_H(\mathcal{A}_\lambda) = \dim_P(\mathcal{A}_\lambda) = D(\lambda) + 1 \qquad \textit{pour } \lambda \in]-\frac{1}{2}, 0].$$
$$\dim_H(\mathcal{A}_\lambda) = \dim_P(\mathcal{A}_\lambda) = 2 \qquad \textit{pour } \lambda \in [0, 1[.$$

Preuve. Soit $\lambda \in]-\frac{1}{2}, 0]$. Soit $\lambda' \in]-\frac{1}{2}, \lambda[$. On considère la probabilité $\eta_{\lambda'}$ définit dans le Lemme 5.3.6. $\eta_{\lambda'}(\cup_{k\in\mathbb{N}^*}\{q_\lambda < 1-\frac{1}{k}\}) = \eta_{\lambda'}(\mathbb{R}/\mathbb{Z} \backslash N_\lambda) \geq \eta_{\lambda'}(S_{\lambda'}) = 1$ car $S_{\lambda'} \subset \mathbb{R}/\mathbb{Z} \backslash N_\lambda$ pour $\lambda' < \lambda$. Ainsi il existe un rang $k_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $\eta_{\lambda'}(\{q_\lambda < 1-\frac{1}{k_0}\}) > 0$. On note alors $\tilde{\eta}_{\lambda'}$ la restriction de $\eta_{\lambda'}$ à l'ensemble $\{q_\lambda < 1-\frac{1}{k_0}\}$. Comme $d_{\tilde{\eta}_{\lambda'}}(x) = d_{\eta_{\lambda'}}(x) = D(\lambda')$ pour $\tilde{\eta}_{\lambda'}$ presque tout x, alors par [Bar08, Théorème 2.1.5] $\dim_H(\{q_\lambda < 1-\frac{1}{k_0}\}) \geq \dim_H(\tilde{\eta}_{\lambda'}) \geq D(\lambda')$. De plus $\dim_H(\{q_\lambda < 1-\frac{1}{k_0}\}) \geq \lim_{\lambda' \nearrow \lambda} D(\lambda') = D(\lambda)$. Ainsi par [Tri82, Théorème 3], $\dim_H(\mathcal{A}_\lambda) \geq \dim_H(\{q_\lambda < 1-\frac{1}{k_0}\} \times [1-\frac{1}{k_0}, 1]) \geq \dim_H(\{q_\lambda < 1-\frac{1}{k_0}\}) + \dim_H([1-\frac{1}{k_0}, 1]) \geq D(\lambda)+1$. De plus, en utilisant le Théorème 5.3.3 et [Tri82, Théorème 3], on obtient : $\dim_P(\mathcal{A}_\lambda) \leq \dim_P(\mathbb{R}/\mathbb{Z} \backslash N_\lambda \times [0,1]) \leq \dim_P(\mathbb{R}/\mathbb{Z} \backslash N_\lambda) + \dim_P([0,1]) = D(\lambda)+1$. Donc $\dim_P(\mathcal{A}_\lambda) = \dim_H(\mathcal{A}_\lambda) = D(\lambda)+1$

Soit $\lambda \in [0,1[$, comme pour tout $x \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, $q_\lambda(x)$ est décroissant en λ alors l'ensemble $\mathcal{A}_\lambda$ est croissant en λ. Donc $\dim_P(\mathcal{A}_\lambda) \geq \dim_H(\mathcal{A}_\lambda) \geq \dim_H(\mathcal{A}_0) = 2$. Or $\mathcal{A}_\lambda \subset \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times [0,1]$ donc $2 \geq \dim_P(\mathcal{A}_\lambda) \geq \dim_H(\mathcal{A}_\lambda)$. □

6 Cas sur-critique

6.1 Théorème ergodique semi-uniforme

Le Théorème ergodique de Birkhoff donne une convergence ν-presque sûre des sommes partielles lorsque ν est une mesure ergodique . Cependant dans notre étude $\mathbb{X}$ est compact. On peut donc obtenir sous certaines conditions une convergence uniforme, notamment si le système est uniquement ergodique.

Définition 6.1.1. *On dit que le système dynamique $(\mathbb{X}, \mathcal{B}(\mathbb{X}), T)$ est uniquement ergodique s'il admet une unique mesure borélienne invariante.*

Théorème 6.1.2. *[Oxt52, 5.1] Soit $f : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Si T est uniquement ergodique alors,*

$$\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(T^i x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int f \, \mathrm{d}\nu$$

converge uniformément où ν est l'unique mesure ergodique du système.

On peut généraliser ce Théorème au cas où T n'est pas uniquement ergodique mais où l'intégrale de f contre une mesure T-invariante ne dépend pas de la mesure :

Théorème 6.1.3. *[Her83, Lemme de la partie 5.4] Soit $f : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Si il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $\nu \in \mathcal{P}_T(\mathbb{X})$,*

$$\int f \, \mathrm{d}\nu = a,$$

alors

$$\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(T^i x) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} a$$

converge uniformément.

Dans le système $(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, \mathcal{B}(\mathbb{R}/\mathbb{Z}), T)$ défini en partie 1.3, l'hypothèse du Théorème précédent est fausse. On ne peut donc pas espérer obtenir une convergence uniforme. Cependant, comme T est continue, on peut quand même obtenir le Théorème ergodique semi-uniforme suivant :

Théorème 6.1.4. *[SS00, Théorème 1.9] Soit $f : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Si il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $\nu \in \mathcal{P}_T(\mathbb{X})$,*

$$\int f \, \mathrm{d}\nu \leq a.$$

Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$:

$$\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(T^i x) \leq a + \varepsilon$$

pour tout $x \in \mathbb{X}$.

Exemple 6.1.5. *Considérons le système $(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, \mathcal{B}(\mathbb{R}/\mathbb{Z}), T)$ défini en partie 1.3.*

$\int -\log g \, \mathrm{d}\nu \in [-\frac{1}{2}, 1]$ *pour toute mesure $\nu \in \mathcal{P}_T(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ par la partie 3.2. De plus, $T : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ est une transformation continue et $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ est un espace métrique compact. Et $-\log g = \cos(2\pi x)$ est une fonction continue. On peut donc utiliser le Théorème ergodique semi-uniforme 6.1.4. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \geq N$, pour tout $x \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$:*

$$-\frac{1}{2} - \varepsilon \leq \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} -\log g(T^i x) \leq 1 + \varepsilon.$$

En particulier, on a pour tout $x \in \mathbb{R}/_{\mathbb{Z}}$:

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} -\log g(T^i x) \geq -\frac{1}{2},$$
$$\text{et } \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} -\log g(T^i x) \leq 1.$$

C'est à dire que pour tout $x \in \mathbb{R}/_{\mathbb{Z}}$, les valeurs d'adhérence de la suite $(\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} -\log g(T^i x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ appartiennent à $[-\frac{1}{2}, 1]$.

6.2 Continuité de q_λ

Après avoir étudié le comportement de N_λ dans la bifurcation, nous allons maitenant étudier le cas sur-critique, c'est à dire $\lambda > \lambda_{\max}$ où $\lambda_{\max} = \inf_\lambda\{\sup_{\nu\in\mathcal{P}_\mathcal{T}(\mathbb{X})} \int \log g_\lambda \,\mathrm{d}\nu \geq 0\}$. Dans la partie 5, on avait défini dans le cadre de l'exemple $\lambda_{\max}$ comme $\sup_{\nu\in\mathcal{P}(\mathbb{X})} \int \log g \,\mathrm{d}\nu$. Cependant, dans le cadre de notre exemple, ces définitions sont équivalentes grâce à la relation $\log g_\lambda = \lambda + \log g$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.

Nous allons montrer que dans ce cas, avec quelques hypothèses supplémentaires, la fonction q_λ est continue. On sait déjà que q_λ est semi-continue inférieurement par le Lemme 2.1.9. En effet, q_λ s'exprime comme un supremum de fonctions continues par la relation suivante :

$$q_\lambda(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \varphi_\lambda^{(n)}(x, 0).$$

Nous allons maintenant écrire q_λ comme un infimum de fonctions continues pour que q_λ soit semi-continue supérieurement et donc continue. Pour cela, nous utiliserons le Théorème ergodique semi-uniforme 6.1.4.

Nous pourrons obtenir ce résultat uniquement en supposant qu'il existe une loi $\tilde{\mu}_\lambda$ admettant un moment d'ordre 2 et qui domine stochastiquement $\mu_{\lambda,x}$ pour tout $x \in \mathbb{X}$.

Commençons par montrer que la fonction q_λ est borné supérieurement par une constante strictement inférieure à 1.

Lemme 6.2.1. *Soit $\lambda > \lambda_{\max}$. Il existe $K_\lambda < 1$ tel que $q_\lambda(x) \leq K_\lambda$ pour tout $x \in \mathbb{X}$.*

Exemple 6.2.2. *Dans le cadre de l'exemple de la transformation $x \mapsto 2x$, il est beaucoup plus facile de trouver une constante K_λ qui convient. En effet :*

Remarque 6.2.3. *Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, pour tout $x \in \mathbb{R}/_{\mathbb{Z}}$,*

$$q_\lambda(x) \leq q_\lambda(0).$$

Preuve. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}/_{\mathbb{Z}}$. La loi de reproduction à la n-ième génération de du processus $Z_n(x)$ est une loi de Poisson de paramètre $e^{\lambda - \cos 2\pi x}$ qui domine stochastiquement une loi de Poisson de paramètre $e^{\lambda-1}$ qui correspond à la loi de reproduction à la n-ième génération du processus $Z_n(0)$. Par définition de $q_\lambda(x) = \mathbb{P}(B(x))$ où $B(x) = \bigcup_{n=0}^{\infty} \{Z_n(x) = 0\}$, on a la conclusion demandé. □

$Z_n(0)$ a donc pour loi un processus de Galton Watson classique ayant comme loi de reproduction une loi de Poisson de paramètre $e^{\lambda-1}$.

Dans le cas où $\lambda > 1$, la loi de reproduction a alors pour espérance $e^{\lambda-1} > 1$. Donc par les résultats classiques sur les processus de Galton Watson, on sait $q_\lambda(0) < 1$. En particulier, $q_\lambda(0) < 1$ est égale à la plus petite solution dans $[0, 1]$ de l'équation: $\exp(e^{\lambda-1}(s-1)) = s$. On posera alors $K_\lambda = q_\lambda(0) < 1$.

Passons à la preuve dans le cas général :

Preuve. Comme $\lambda > \lambda_{\max}$, pour tout $\nu \in \mathcal{P}_T(\mathbb{X})$,

$$\int \log g_\lambda \, \mathrm{d}\nu > 0.$$

Il existe donc $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $\nu \in \mathcal{P}_T(\mathbb{X})$,

$$\int \log g_\lambda \, \mathrm{d}\nu > \varepsilon$$

par compacité de $\mathcal{P}_T(\mathbb{X})$ (car $\mathbb{X}$ est compact). Par le Théorème ergodique semi-uniforme 6.1.4, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, pour tout $x \in \mathbb{X}$,

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \log g_\lambda > \frac{\varepsilon}{2}.$$

En particulier, pour tout $x \in \mathbb{X}$,

$$\partial_s \varphi_\lambda^{(N)}(x, 1) > \exp\left(\frac{\varepsilon N}{2}\right) = 1 + \eta$$

avec $\eta > 0$. Or il existe $\tilde{C} > 0$ tel que $\partial^2_{s,s}\varphi_\lambda(x,t) < \tilde{C}$ pour tout $x \in \mathbb{X}$ et $t \in [0,1]$ car il existe une loi $\tilde{\mu}_\lambda$ admettant un moment d'ordre 2 et qui domine stochastiquement $\mu_{\lambda,x}$ pour tout $x \in \mathbb{X}$. Alors il existe $C > 0$ tel que $\partial^2_{s,s}\varphi_\lambda^{(N)}(x,t) < C$ pour tout $x \in \mathbb{X}$ et $t \in [0,1]$. On obtient cette majoration en dérivant deux fois l'identité 1 du Corollaire 2.1.4 : $\varphi_\lambda^{(N)}(x,t) = \varphi_\lambda(x, \varphi_\lambda(Tx, ...\varphi_\lambda(T^{n-1}, \varphi_\lambda(T^{N-1}x, s))...))$. Ainsi il existe $K_\lambda < 1$ tel que pour tout $x \in \mathbb{X}$, pour tout $t \in [K_\lambda, 1]$,

$$\partial_s\varphi_\lambda^{(N)}(x,t) > 1.$$

Or pour tout $x \in \mathbb{X}$, $\varphi_\lambda^{(N)}(x,1) = 1$, ainsi $\varphi_\lambda^{(N)}(x,K_\lambda) \leq K_\lambda$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{X}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\varphi_\lambda^{((n+1)N)}(x,K_\lambda) &= \varphi_\lambda^{(Nn)}(x, \varphi_\lambda^{(N)}(T^{nN}x, K_\lambda)) \text{ par le Corollaire 2.1.4}\\ &\leq \varphi_\lambda^{(Nn)}(x,K_\lambda)\\ &\quad \text{car } \varphi_\lambda^{(nN)}(x,.) \text{ est croissante et } \varphi_\lambda(T^{Nn}x, K_\lambda) \leq K_\lambda.\end{aligned}$$

Ainsi pour tout $x \in \mathbb{X}$, la suite $(\varphi_\lambda^{(nN)}(x,K_\lambda))_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Comme de plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in \mathbb{X}$, $\varphi_\lambda^{(nN)}(x,0) \leq \varphi_\lambda^{(nN)}(x,K_\lambda)$ alors $q_\lambda(x) \leq K_\lambda$. □

Lemme 6.2.4. *Soient $\lambda > \lambda_{\max}$ et $x \in \mathbb{X}$. Montrons que la suite $(\varphi_\lambda^{(nN)}(x,K_\lambda))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $q_\lambda(x)$.*

Preuve. Soient $\lambda > 1$, $x \in \mathbb{X}$ et $n \in \mathbb{N}$. $\varphi_\lambda^{(nN)}(x,0) \leq \varphi_\lambda^{(Nn)}(x,K_\lambda)$ car $\varphi_\lambda^{(nN)}(x,.)$ est une fonction génératrice des probabilités donc en particulier elle est croissante. Comme $\varphi_\lambda^{(nN)}(x,0)$ croit vers $q_\lambda(x)$, il nous reste à montrer que $\varphi_\lambda^{(nN)}(x,K_\lambda) - \varphi_\lambda^{(nN)}(x,0) \to 0$.

Pour cela nous allons utiliser [AK71, Théorème 5]. Ce Théorème nous dit qu'étant donné une suite de loi de reproduction, la fonction génératrice des probabilités associée à la taille de la population à la n-ième génération converge vers une fonction g pour tout $s \in [0,1]$. De plus, ou bien $g(s) = g(0)$ pour tout $s \in [0,1[$ ou bien g est strictement croissante sur $[0,1[$. On est dans le second cas si et seulement si

$$\sum_{n=1}^{\infty}(1 - \mathbb{P}(Y_n = 1)) < \infty,$$

où pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, Y_n est une variable suivant la loi de reproduction de la n-ième génération.

Dans notre cas, pour tout $x \in \mathbb{X}$,

$$\partial_s \varphi_\lambda^{(N)}(x,1) > \exp\left(\frac{\varepsilon N}{2}\right) = 1 + \eta$$

avec $\eta > 0$. Comme il existe $C > 0$ tel que $\partial^2_{s,s}\varphi_\lambda^{(N)}(x,t) < C$ pour tout $x \in \mathbb{X}$ et $t \in [0,1]$. Alors il existe $0 < \tilde{K}_\lambda < 1$ tel que pour tout $x \in \mathbb{X}$, pour tout $t \in [\tilde{K}_\lambda, 1]$,

$$\partial_s \varphi_\lambda^{(N)}(x,t) > 1 + \frac{\eta}{2}.$$

Ainsi $\tilde{K}_\lambda - \varphi_\lambda^{(N)}(x,\tilde{K}_\lambda) \geq (1-\tilde{K}_\lambda)\frac{\eta}{2} > 0$. En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=1+nN}^{(n+1)N} (1 - \mathbb{P}(Y_k = 1)) > \frac{(1-\tilde{K}_\lambda)\eta}{2\tilde{K}_\lambda} > 0$$

où pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, Y_k est une variable suivant la loi de reproduction de la n-ième génération. Ainsi,

$$\sum_{k=1}^{\infty}(1 - \mathbb{P}(Y_k = 1)) = \infty.$$

Donc, $\varphi_\lambda^{(nN)}(x,K_\lambda) - \varphi_\lambda^{(nN)}(x,0) \to 0$ par [AK71, Théorème 5]. □

Théorème 6.2.5. *Pour tout $\lambda > \lambda_{\max}$, la fonction q_λ est continue.*

Preuve. Par le Lemme 2.1.9, q_λ est semi-continue inférieurement. Par les deux lemmes précédents, $q_\lambda(x) = \inf_{n\in\mathbb{N}} \varphi_\lambda^{(Nn)}(x,K_\lambda)$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi_\lambda^{(n)}(.,K_\lambda)$ est continue. Ainsi q_λ est semi-continue supérieurement, donc q_λ est continue. □

Ce dernier Théorème nous donne donc la continuité de la fonction q_λ dans le cas où $\lambda > \lambda_{\max}$. Cependant, on pourrait se demander si la fonction q_λ n'est pas plus régulière.

A Code 1 : simulation du graphe de q_λ

On peut simuler le graphe de q_λ en l'approximant par le graphe de $\varphi_\lambda^{(n)}(x,0)$ avec n suffisamment grand. Dans ce code, j'ai pris $n = 50$.

```python
import numpy as np
import random as rnd
from matplotlib import pyplot as plt

N=1000
l=0.5



def phi(x,s,l):
    return np.exp((s-1)*np.exp(l-np.cos(2*x*np.pi)))

def phi_n(x,s,l,n):
    if n==0:
        return s
    else:
        return phi(x,phi_n((2*x+10**(-8)*rnd.gauss(0,1))%1,s,l,n-1),l)



X=np.array([i/N for i in range (N)])
Y=phi_n(X,0,l,50)


plt.plot(X,Y,color='green')
plt.show()
```

Références

[AK71] Krishna B. Athreya and Samuel Karlin. On branching processes with random environments. I. Extinction probabilities. *Ann. Math. Statist.*, 42:1499–1520, 1971.

[Bal00] Viviane Baladi. *Positive transfer operators and decay of correlations*, volume 16 of *Advanced Series in Nonlinear Dynamics*. World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ, 2000.

[Bar08] Luis Barreira. *Dimension and recurrence in hyperbolic dynamics*, volume 272 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Verlag, Basel, 2008.

[Bie45] Irénée-Jules Bienaymé. *De la loi de multiplication et de la durée des familles: probabilités*. Cosson, 1845.

[Bou00] Thierry Bousch. Le poisson n'a pas d'arêtes. *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.*, 36(4):489–508, 2000.

[Bow73] Rufus Bowen. Topological entropy for noncompact sets. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 184:125–136, 1973.

[BS94] Shaun Bullett and Pierrette Sentenac. Ordered orbits of the shift, square roots, and the devil's staircase. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 115(3):451–481, 1994.

[BV13] Luis Barreira and Claudia Valls. *Dynamical systems*. Universitext. Springer, London, 2013. An introduction, Translated from the 2012 Portuguese original.

[Fal90] Kenneth Falconer. *Fractal geometry*. John Wiley & Sons, Ltd., Chichester, 1990. Mathematical foundations and applications.

[Fal97] Kenneth Falconer. *Techniques in fractal geometry*. John Wiley & Sons, Ltd., Chichester, 1997.

[Her83] Michael-R. Herman. Une méthode pour minorer les exposants de Lyapounov et quelques exemples montrant le caractère local d'un théorème d'Arnol'd et de Moser sur le tore de dimension 2. *Comment. Math. Helv.*, 58(3):453–502, 1983.

[KO13] Gerhard Keller and Atsuya Otani. Bifurcation and Hausdorff dimension in families of chaotically driven maps with multiplicative forcing. *Dyn. Syst.*, 28(2):123–139, 2013.

[New89] Sheldon E. Newhouse. Continuity properties of entropy. *Ann. of Math. (2)*, 129(2):215–235, 1989.

[Orp15] Tuomas Orponen. On the packing dimension and category of exceptional sets of orthogonal projections. *Ann. Mat. Pura Appl. (4)*, 194(3):843–880, 2015.

[Oxt52] John C. Oxtoby. Ergodic sets. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 58:116–136, 1952.

[PP90] William Parry and Mark Pollicott. Zeta functions and the periodic orbit structure of hyperbolic dynamics. *Astérisque*, (187-188):268, 1990.

[PW97] Yakov Pesin and Howard Weiss. The multifractal analysis of Gibbs measures: motivation, mathematical foundation, and examples. *Chaos*, 7(1):89–106, 1997.

[Rue73] David Ruelle. Statistical mechanics on a compact set with Z^v action satisfying expansiveness and specification. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 187:237–251, 1973.

[Sch70] Laurent Schwartz. *Analyse*. Collection Enseignement des Sciences, No. 11. Hermann, Paris, 1970. Deuxième partie: Topologie générale et analyse fonctionnelle.

[Sch07] Dierk Schleicher. Hausdorff dimension, its properties, and its surprises. *Amer. Math. Monthly*, 114(6):509–528, 2007.

[SS00] R. Sturman and J. Stark. Semi-uniform ergodic theorems and applications to forced systems. *Nonlinearity*, 13(1):113–143, 2000.

[Tri82] Claude Tricot, Jr. Two definitions of fractional dimension. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 91(1):57–74, 1982.

[Wal82] Peter Walters. *An introduction to ergodic theory*, volume 79 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1982.

[WG75] H. W. Watson and Francis Galton. On the probability of the extinction of families. *The Journal of the Anthropological Institute of Great Britain and Ireland*, 4:138–144, 1875.