Feuille d'exercices n°2

Dans les exercices de cette feuille, quand on parle de coordonnées sans préciser le repère, on se place dans un repère quelconque. On peut faire les figures dans le repère usuel.

Exercice 1. Soit $ACBD$ un parallélogramme. Soient E et F deux points du plan tel que $ECFD$ soit un parallélogramme.

1. Faire un dessin (attention à l'ordre des points !).

2. En utilisant la relation de Chasles, montrer que $AEBF$ est un parallélogramme. Y a-t-il d'autres arguments n'utilisant pas la relation de Chasles ?

Exercice 2. On considère un parallélogramme $ABCD$ et P, Q, R, S les points définis par les égalités :

$$\overrightarrow{AP} = 2\overrightarrow{BA},\ \overrightarrow{BQ} = 2\overrightarrow{CB},\ \overrightarrow{CR} = 2\overrightarrow{DC},\ \overrightarrow{DS} = 2\overrightarrow{AD}.$$

Montrer que $PQRS$ est un parallélogramme.

Exercice 3. On considère les points $A\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ et le vecteur $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$.

1. Donner les coordonnées du vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$. Représenter les points A et B ainsi que le vecteur $\overrightarrow{AB}$ sur une figure.

2. Dessiner le point C tel que $\overrightarrow{BC} = \vec{v}$ et donner les coordonnées de C.

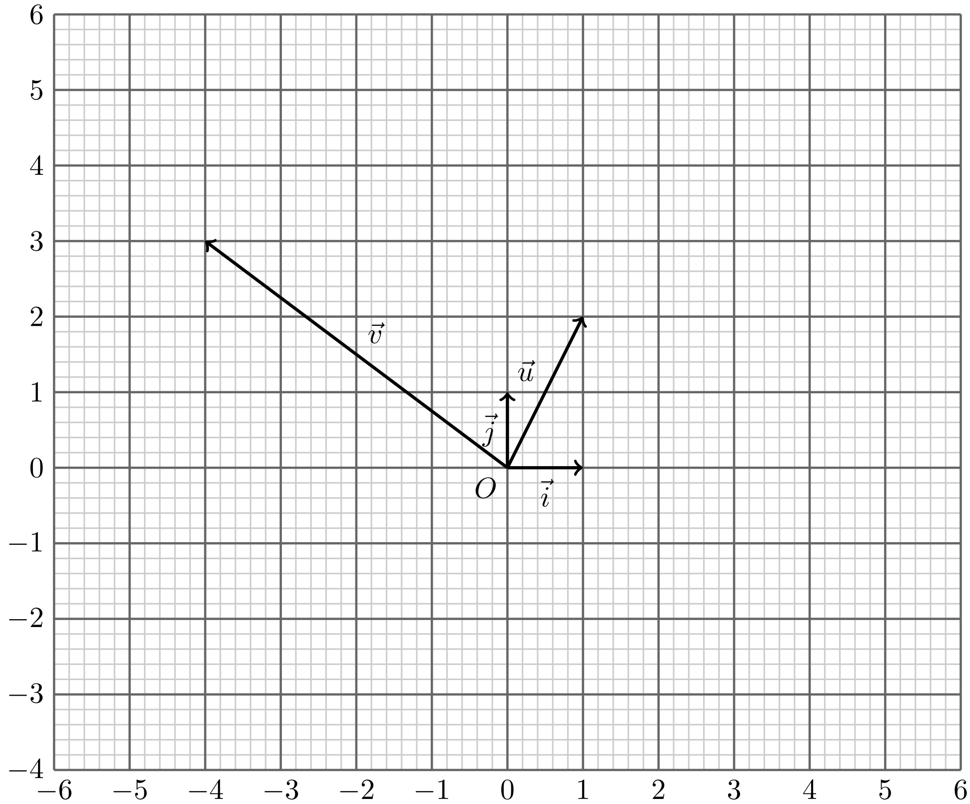
3. On considère le vecteur $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$. Sur la figure représentant les points A, B, C, où peut-on voir ce vecteur ? Quelles sont ses coordonnées ?

Exercice 4. On considère les points $A\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}7\\5\end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix}9\\1\end{pmatrix}$ et $D\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$.

1. Faire une figure.

2. Le quadrilatère $ABCD$ est-il un parallélogramme ?

Exercice 5. On se place dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ de la figure.



1. Donner les coordonnées des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ représentés ci-dessus.

2. Donner les coordonnées des vecteurs suivants :

$$\vec{w}_1 = \vec{u} + \vec{v}, \quad \vec{w}_2 = \vec{u} - \vec{v}, \quad \vec{w}_3 = 2\vec{u}, \quad \vec{w}_4 = \vec{w}_1 - \vec{w}_3.$$

3. Représenter sur la figure ci-dessus les vecteurs $\vec{w}_1$, $\vec{w}_2$, $\vec{w}_3$, $\vec{w}_4$.

4. Les vecteurs $\vec{w}_1$ et $\vec{w}_2$ sont-ils colinéaires ? Les vecteurs $\vec{w}_2$ et $\vec{w}_4$ sont-ils colinéaires ?

Exercice 6. On se place dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ de l'exercice précédent.

1. Montrer que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'exercice précédent forment une base du plan.

2. Donner les coordonnées dans la base $(\vec{u}, \vec{v})$ des vecteurs $\vec{w}_1$, $\vec{w}_2$, $\vec{w}_3$, $\vec{w}_4$.

3. On considère le vecteur $\vec{w}$ qui a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ dans la base $(\vec{u}, \vec{v})$. Quelles sont les coordonnées de $\vec{w}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$?

4. Représenter le vecteur $\vec{w}$ sur la figure de l'exercice 3.

Exercice 7. Dans chacun des cas suivants, dites si la famille $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base du plan ou non. Justifiez votre réponse.

a) $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, b $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 3\sqrt{3} \end{pmatrix}$, c) $\vec{u}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 8. On se place dans un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. Soit $\vec{e}_1,\vec{e}_2$ les vecteurs dont les coordonnées dans la base $(\vec{i},\vec{j})$ sont $\vec{e}_1\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{e}_2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$. Montrer que $(\vec{e}_1,\vec{e}_2)$ est une base du plan.

2. On pose $\vec{w}=2\vec{e}_1+5\vec{e}_2$. Sans faire de calcul, donner les coordonnées de $\vec{w}$ dans la base $(\vec{e}_1,\vec{e}_2)$. Donner les coordonnées de $\vec{w}$ dans la base $(\vec{i},\vec{j})$.

3. Soit $\vec{w}_1,\vec{w}_2$ les vecteurs dont les coordonnées dans la base $(\vec{i},\vec{j})$ sont $\vec{w}_1\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$ et $\vec{w}_2\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$. Donner les coordonnées dans la base $(\vec{e}_1,\vec{e}_2)$ des vecteurs $\vec{w}_1$ et $\vec{w}_2$.

Exercice 9. Résoudre les systèmes d'équations suivants en utilisant une méthode par combinaison ou une méthode par substitution (les systèmes c) et d) sont facultatifs).

$a)\left\{\begin{array}{rcl}3x-2y&=&1\\x-y&=&2\end{array}\right.\quad b)\left\{\begin{array}{rcl}3x+2y&=&1\\5x+4y&=&3\end{array}\right.\quad c)\left\{\begin{array}{rcl}4x+3y&=&-1\\3x+2y&=&10\end{array}\right.\quad d)\left\{\begin{array}{rcl}4x+2y&=&1\\2x+3y&=&4\end{array}\right.$

Exercice 10. On se place dans un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$. On considère les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\7\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$.

1. Montrer que $(\vec{u},\vec{v})$ est une base du plan.

2. On considère le vecteur $\vec{w}$ de coordonnées $\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}$ dans la base $(\vec{i},\vec{j})$. Donner les coordonnées dans la base $(\vec{u},\vec{v})$ du vecteur $\vec{w}$.

3. En déduire les coordonnées dans la base $(\vec{u},\vec{v})$ du vecteur $3\vec{w}$.

Exercice 11. On se place dans un repère orthonormé.
On considère les vecteurs $\vec{w}_1\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$, $\vec{w}_2\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$ et $\vec{w}_3\begin{pmatrix}-4\\1\end{pmatrix}$.

1. Calculer les produits scalaires $\langle\vec{w}_1,\vec{w}_2\rangle$, $\langle\vec{w}_2,\vec{w}_3\rangle$, $\langle\vec{w}_1,\vec{w}_3\rangle$. Quels sont les vecteurs orthogonaux parmi $\vec{w}_1,\vec{w}_2,\vec{w}_3$?

2. Calculer le produit scalaire $\langle\vec{w}_1,\vec{w}_1\rangle$. Quelle est la norme de $\vec{w}_1$?

Exercice 12. On se place dans un repère orthonormé. On considère le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$.

1. Donner un vecteur $\vec{v}$ colinéaire à $\vec{u}$ et de norme 1.

2. Donner un vecteur non nul $\vec{w}$ orthogonal à $\vec{u}$.

Exercice 13. Dans un repère orthonormé, on considère les points $A\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}0\\5\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}$.

1. Le triangle ABC est-il isocèle ? équilatéral ? rectangle ?

2. Calculer les coordonnées des milieux des côtés $[AB]$, $[BC]$ et $[AC]$.

Exercice 14. On se place dans un repère orthonormé. On considère un triangle ABC dont les sommets ont pour coordonnées $A\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix}$. On note $\widehat{A}$ l'angle du triangle en A.

1. Calculer le produit scalaire $\langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\rangle$.

2. Calculer $\cos(\widehat{A})$ à l'aide de la formule reliant produit scalaire et cosinus. En déduire une valeur approchée de l'angle $\widehat{A}$.

Exercices supplémentaires

Exercice 15. Soit $ABCD$ un parallélogramme, et I le milieu du segment $[AB]$. Soit J le point du segment $[DI]$ tel que $DJ = 2IJ$.

1. Montrer que $\overrightarrow{ID} = 3\overrightarrow{IJ}$.

2. Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{AI}$, $\overrightarrow{ID}$, $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{AJ}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.

3. Que pouvez-vous dire des points A, J et D ?

Exercice 16. On considère les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}-6\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$.

1. Représenter ces 3 vecteurs sur une même figure.

2. Montrer que $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base.

3. Donner les coordonnées des vecteurs suivants dans la base $(\vec{u}, \vec{v})$: $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$.

Exercice 17. On considère les vecteurs $\vec{u}_1\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}$, $\vec{v}_1\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$, $\vec{u}_2\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$, $\vec{v}_2\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}$, $\vec{u}_3\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$.

1. Dessiner ces 5 vecteurs sur une même figure.

2. Les vecteurs $\vec{u}_1$ et $\vec{v}_1$ sont-ils colinéaires ? Les vecteurs $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_3$ sont-ils colinéaires ?

3. Montrer que $(\vec{u}_1, \vec{v}_1)$ et $(\vec{u}_2, \vec{v}_2)$ sont des bases du plan.

4. On pose $\vec{w} = \vec{2}\vec{u}_1 + \vec{v}_1$.

a) Donner les coordonnées de $\vec{w}$ dans la base $(\vec{u}_1, \vec{v}_1)$.

b) Donner les coordonnées de $\vec{w}$ dans la base $(\vec{u}_2, \vec{v}_2)$.

Exercice 18. Dans chacun des cas suivants, donner les valeurs du paramètre m pour lesquelles la famille $(\vec{u}, \vec{v})$ forme une base du plan ou non. Justifier votre réponse.

a) $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\m\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$, b) $\vec{u}\begin{pmatrix}m\\2m-1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$, c) $\vec{u}\begin{pmatrix}m\\4\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\m\end{pmatrix}$.

Exercice 19. Dans un repère orthonormé, on considère les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix}$.

1. Calculer les produits scalaires $\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle$ et $\langle 2\vec{u} - \vec{v}, 3\vec{u} + \vec{v}\rangle$.

2. Déterminer tous les réels x et y tels que le vecteur $x\vec{u} + y\vec{v}$ soit orthogonal au vecteur $\vec{u}$.

3. Déterminer tous les vecteurs qui sont orthogonaux au vecteur $\vec{v}$. Montrer que ces vecteurs sont tous colinéaires entre eux.

Exercice 20. On se place dans un repère orthonormé.
On considère le vecteur $\vec{v}\begin{pmatrix}-1/2\\\sqrt{3}/2\end{pmatrix}$. Pour tout réel t, $\vec{u}_t$ est le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix}\sqrt{3}/2\\t\end{pmatrix}$.

1. Calculer $\|\vec{v}\|$.

2. Déterminer pour quelle(s) valeur(s) de t le vecteur $\vec{u}_t$ est de norme 1.

3. En déduire pour quelle valeur de t les vecteurs $\vec{u}_t$ et $\vec{v}$ forment une base orthonormée.

Exercice 21. Dans un repère orthonormé, on considère les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}6\\8\end{pmatrix}$.

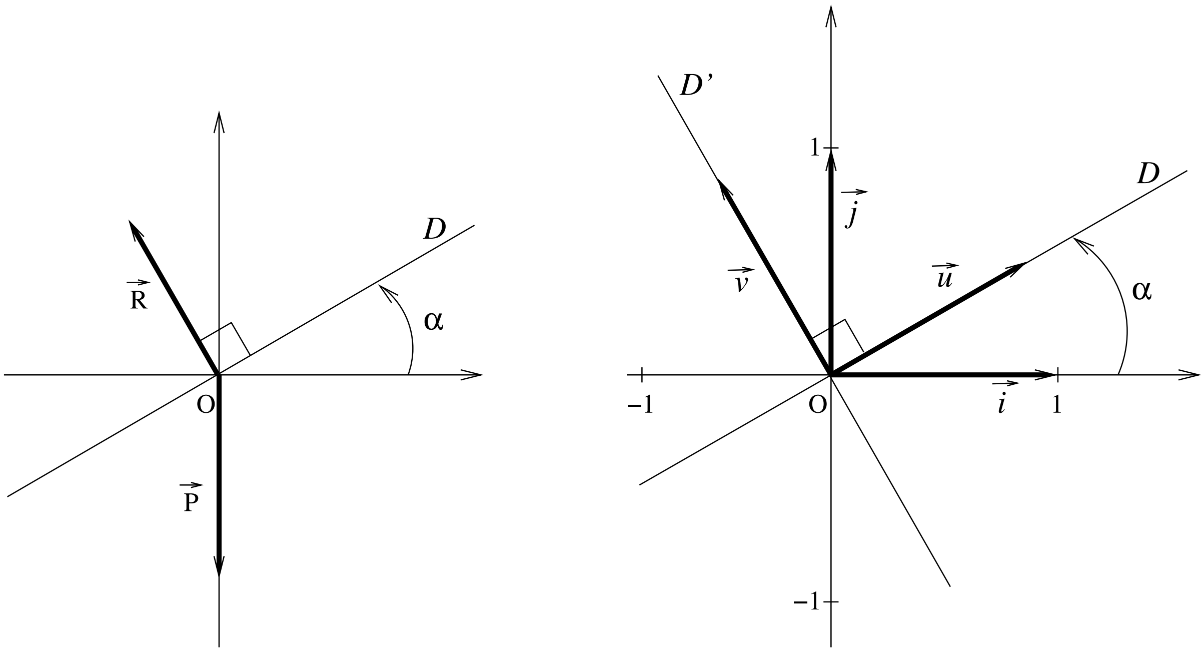
1. Montrer que les deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux et forment une base.

2. On considère les vecteurs $\vec{u}_a = a\vec{u}$ et $\vec{v}_b = b\vec{v}$, où a et b sont des réels. Déterminer $a > 0$ et $b > 0$ tels que $||\vec{u}_a|| = 1$ et $||\vec{v}_b|| = 1$. Puis montrer que $(\vec{u}_a, \vec{v}_b)$ est une base orthonormée.

3. On considère $\vec{w}\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$. Donner les coordonnées de $\vec{w}$ dans la base $(\vec{u}, \vec{v})$, puis donner les coordonnées de $\vec{w}$ dans la base orthonormée $(\vec{u}_a, \vec{v}_b)$.

Exercice 22. Le but de cet exercice est de voir un changement de base de façon géométrique, dans un contexte qu'on peut rencontrer en physique (masse ponctuelle sur un plan incliné D, soumise aux forces suivantes : poids $\vec{P}$ et réaction du support $\vec{R}$). Voir la figure de gauche.

On considère la droite D passant par O telle que l'angle entre l'axe horizontal et D est α, avec $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$ (angle en radians). Soit $\vec{u}$ le vecteur directeur de D de norme 1 représenté sur la figure de droite. Soit D' la droite passant par O orthogonale à D et $\vec{v}$ le vecteur directeur de D' de norme 1 représenté sur la figure de droite. Par définition, $(O, \vec{u}, \vec{v})$ est un repère orthonormé. La figure de droite représente ce repère ainsi que le repère canonique $(O, \vec{i}, \vec{j})$.



1. Donner les coordonnées de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.

2. Trouver les coordonnées de $\vec{i}$ et de $\vec{j}$ dans la base $(\vec{u}, \vec{v})$ (on peut, si l'on veut, déterminer ces coordonnées de façon géometrique).

3. Soit p un réel strictement positif et $\vec{P} = -p\vec{j}$ (figure de gauche). Donner les coordonnées de $\vec{P}$ dans la base $(\vec{u}, \vec{v})$.

4. Soit $\vec{R}$ un vecteur colinéaire à $\vec{v}$ (figure de gauche) tel que $\vec{R} + \vec{P}$ soit un vecteur colinéaire à $\vec{u}$. Déterminer les coordonnées de $\vec{R}$ dans la base $(\vec{u}, \vec{v})$. Quelles sont les coordonnées de $\vec{R} + \vec{P}$ dans la base $(\vec{u}, \vec{v})$?
(le poids $\vec{P}$ et la réaction du support $\vec{R}$ sont les forces qui s'appliquent sur la masse placée en O ; $\vec{P} + \vec{R}$ est la somme des forces, qui est proportionnelle à l'accélération ; la masse se déplaçant sur le plan incliné D, l'accélération est colinéaire à $\vec{u}$).