

Feuille d'exercices n°1

Exercice 1. On considère un triangle ABC rectangle en A tel que $BC = 5,5$ cm et $AC = 2,2$ cm.

1. Calculer AB à l'aide du théorème de Pythagore (donner la formule de la valeur exacte, puis donner une valeur approchée à l'aide d'une calculatrice).
2. Calculer $\sin(\widehat{B})$.
3. À l'aide d'une calculatrice, donner la valeur approchée de l'angle \widehat{B} (en degrés ou en radians).

Exercice 2. On considère un triangle ABC rectangle en A tel que $AC = 8$ cm et $\widehat{B} = 50$ degrés.

1. Donner les valeurs des angles \widehat{A} et \widehat{C} .
2. Calculer les longueurs AB et BC .

Exercice 3.

1. Dans chacun des cas suivants, dire si les deux réels correspondent au même point sur le cercle trigonométrique, et dessiner les points sur le cercle :

$$\text{a) } \frac{\pi}{2} \text{ et } \frac{9\pi}{2}, \quad \text{b) } -\frac{\pi}{6} \text{ et } \frac{17\pi}{6}, \quad \text{c) } \frac{\pi}{3} \text{ et } -\frac{5\pi}{3}.$$

2. Donner tous les réels x correspondant au même point du cercle trigonométrique que le réel $\frac{\pi}{3}$.

Exercice 4.

1. En utilisant les symétries sur le cercle trigonométrique, donner le cosinus et le sinus des réels suivants : $-\frac{\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{6}$, $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{4\pi}{3}$.
2. Donner le cosinus et le sinus des réels suivants : -3π , $\frac{7\pi}{2}$, $-\frac{4\pi}{3}$, $-\frac{5\pi}{4}$.

Exercice 5. Résoudre les équations :

1. $\sin(\alpha) = \frac{1}{2}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ puis avec $\alpha \in [0, 2\pi[$;
2. $\cos(\alpha) = \frac{1}{2}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ puis avec $\alpha \in [0, 2\pi[$;
3. $\cos(\alpha) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin(\alpha) < 0$ avec $\alpha \in]-\pi, \pi]$;
4. $\sin(\alpha) = \sin(\frac{\pi}{5})$ avec $\alpha \in]-\pi, \pi]$.

Exercice 6. Soit α un réel tel que $\cos(\alpha) = -\frac{3}{5}$.

1. Calculer les deux valeurs possibles de $\sin(\alpha)$.
2. On sait que $\alpha \in [0, \pi]$. Donner alors l'unique valeur de $\sin(\alpha)$ qui convient.

Exercice 7.

1. Démontrer que, pour tout réel α , on a : $\cos^2(\alpha) = \frac{1}{2}(\cos(2\alpha) + 1)$.
2. En utilisant cette formule, calculer $\cos(\frac{\pi}{12})$.
3. En déduire $\sin(\frac{\pi}{12})$.
4. En déduire le cosinus et le sinus de $-\frac{\pi}{12}$.
5. Montrer que $\frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12}$. En déduire le cosinus et le sinus de $\frac{5\pi}{12}$.
6. *Question facultative* : De la même manière que précédemment :
 - a) Calculer $\cos(\frac{\pi}{8})$ en utilisant la formule de la question 1.
 - b) En déduire $\sin(\frac{\pi}{8})$.
 - c) En déduire le cosinus et le sinus de $\frac{7\pi}{8}$.

Rappels : $\cos(\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$, $\cos(\frac{\pi}{4}) = \sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$, $\sin(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
 $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$, $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$.

Exercices supplémentaires

Exercice 8. On considère un triangle ABC rectangle en A tel que $BC = 4$ et $\widehat{B} = \frac{\pi}{6}$ (angle en radians). Calculer les longueurs AB et AC .

Exercice 9. On considère un triangle ABC isocèle en A tel que $AB = AC = \ell$ avec $\ell = 6$ cm, et tel que l'angle \widehat{BAC} ait une mesure en radians égale à $\frac{\pi}{4}$. Soit H le milieu du segment $[BC]$. Comme le triangle ABC est isocèle, (AH) est la hauteur issue de A , ce qui implique que le triangle BHA est rectangle en H .

1. Donner les valeurs des angles \widehat{CBA} et \widehat{BCA} , ainsi que la valeur de l'angle \widehat{BAH} . 2. En déduire la longueur BH puis la longueur BC (donner des valeurs approchées). 3. En déduire que $\cos(\frac{3\pi}{8}) = \sin(\frac{\pi}{8})$.

Exercice 10. Dans chacun des cas suivants, dire si les deux réels correspondent au même point sur le cercle trigonométrique, et dessiner les points sur le cercle :

a) $\frac{4\pi}{3}$ et $-\frac{2\pi}{3}$, b) $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{3\pi}{2}$, c) $-\frac{\pi}{2}$ et $-\frac{3\pi}{2}$, d) $\frac{2\pi}{3}$ et $\frac{7\pi}{3}$.

Exercice 11.

1. En utilisant les symétries sur le cercle trigonométrique, donner le cosinus et le sinus des réels suivants : $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{4}$, $-\frac{\pi}{6}$, $-\frac{\pi}{2}$.

2. Donner le cosinus et le sinus des réels suivants : $\frac{5\pi}{3}$, $\frac{7\pi}{3}$, $\frac{9\pi}{3}$, $-\frac{2\pi}{3}$.

Exercice 12. Résoudre les équations suivantes (avec $\alpha \in \mathbb{R}$) :

- $2 \cos(\alpha) = 1$,
- $\sin(3\alpha) = 0$,
- $\sin(2\alpha) = \sin(\frac{\pi}{7})$,
- $4 \cos^2(\alpha) = 1$,
- $(\sin(\alpha) - 1)(\cos(\alpha) - 1) = 0$.

Exercice 13. Montrer que, pour tout x réel,

- $(\sin(x) + \cos(x))^2 = 1 + \sin(2x)$,
- $(\sin(x) - \cos(x))^2 = 1 - \sin(2x)$.

Exercice 14.

- Montrer que, pour tous réels a et b , on a : $\cos(a - b) - \cos(a + b) = 2 \sin(a) \sin(b)$. 2. En posant $x = a + b$ et $y = a - b$, en déduire que, pour tous réels x et y , $\cos(y) - \cos(x) = 2 \sin(\frac{x+y}{2}) \sin(\frac{x-y}{2})$. 3. Montrer de même que $\cos(a - b) + \cos(a + b) = 2 \cos(a) \cos(b)$. En déduire une factorisation de $\cos(x) + \cos(y)$.
- Calculer $\sin(a + b) + \sin(a - b)$ et $\sin(a + b) - \sin(a - b)$. En déduire une factorisation de $\sin(x) + \sin(y)$ et de $\sin(x) - \sin(y)$.

Exercice 15. Développer $\sin(x - \frac{\pi}{4})$. En déduire les solutions de

- $\sin(x) - \cos(x) = 0$,
- $\sin(x) - \cos(x) = \sqrt{2}$.

Exercice 16. Résoudre dans $[0, 2\pi[$ puis dans $] -\pi, \pi]$ l'équation suivante :

$$1 + \cos(\alpha) + \cos(2\alpha) = 0.$$

On pourra utiliser l'identité $\cos(2\alpha) = 2 \cos^2(\alpha) - 1$.