

Vitesses de convergences de suites récurrentes

Nous allons discuter brièvement du lien entre nature des points fixes d’une transformation et propriétés de convergence des suites récurrentes associées. Nous allons en particulier nous attarder sur les vitesses de convergence possibles. Nous éesenterons de plus des moyens pour mettre en évidence, qualitativement ou quantitativement, ces vitesses de convergence à l’aide des outils de l’atelier.

## 1 Trois comportements qualitatifs

Soient  $D$  un intervalle ouvert et  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de domaine  $D$ . Supposons qu’il existe :

- Un point fixe  $x^*$  de  $f$ , c’est-à-dire un réel  $x^* \in D$  tel que  $f(x^*) = x^*$  ;
- un intervalle  $x^* \in I \subset D$  tel que  $f(I) \subset I$ .

Étant donné un point  $x \in I$ , la stabilité de l’intervalle  $I$  par  $f$  permet de définir par récurrence une suite  $(x_n)_{n \geq 0}$  :

$$\begin{cases} x_0 &= x ; \\ x_{n+1} &= f(x_n) \quad \forall n \geq 0. \end{cases} \tag{1.1}$$

Nous allons nous intéresser aux trois questions suivantes :

- Quelles conditions suffisantes assurent qu’un tel intervalle  $I$  existe ?
- Quelles conditions suffisantes assurent, quitte à réduire l’intervalle  $I$ , que la suite  $(x_n)_{n \geq 0}$  converge vers le point fixe  $x^*$  ?
- Dans ce dernier cas, à quelle vitesse la suite  $(x_n)_{n \geq 0}$  converge-t-elle vers  $x^*$  ?

### 1.1 Point fixe attractif

Le type le plus fréquent (*générique*) de point fixe attractif est un point fixe en lequel la dérivée de  $f$  est strictement comprise entre  $-1$  et  $1$ .

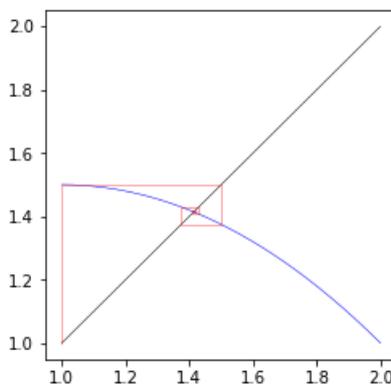


Diagramme en toile d’araignée pour  $f(x) = -0,5x^2 + x + 1$  avec pour valeur initiale 1. Le point  $\sqrt{2}$  est attractif.

Un tel point fixe est associé à une vitesse de convergence exponentielle.

**Theorem 1.1.** Soit  $D$  un intervalle ouvert et  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$ . Soit  $x^* \in D$  tel que  $f(x^*) = x^*$ . Supposons que  $|f'(x^*)| < 1$ . Alors il existe un intervalle ouvert  $x^* \in I \subset D$  tel que :

- $f(I) \subset I$  ;
- pour tout  $x \in I$ , la suite  $(x_n)_{n \geq 0}$  définie par l’Équation (1.1) converge vers  $x^*$  ;
- pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe une constante  $C_\varepsilon > 0$  telle que, pour tout  $n \geq 0$  et  $x \in I$ ,

$$|x_n - x^*| \leq C_\varepsilon (|f'(x^*)| + \varepsilon)^n |x - x^*|. \tag{1.2}$$

La fonction  $n \mapsto (|f'(x^*)| + \varepsilon)^n$  étant exponentielle, on parle de convergence à vitesse exponentielle. Si  $|f'(x^*)| > 0$ , on dispose aussi d'une borne inférieure sur la vitesse de convergence, ce qui permet de réécrire l'Équation (1.2) : pour tout  $x \in I$  différent de  $x^*$ ,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(|x_n - x^*|)}{n} = \ln(|f'(x^*)|). \tag{1.3}$$

Remarquons au passage que si  $f'(x^*) > 0$ , alors la suite  $(x_n)_{n \geq 0}$  est monotone à partir d'un certain rang, alors qu'elle oscille autour de  $x^*$  à partir d'un certain rang si  $f'(x^*) < 0$ .

### 1.2 Point fixe hyper-attractif

Si la dérivée de  $f$  au point fixe vaut 0, alors l'Équation (1.2) devient

$$|x_n - x^*| \leq C_\varepsilon \varepsilon^n |x - x^*|,$$

ou encore  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(|x_n - x^*|)}{n} = -\infty$ . La suite  $(x_n)_{n \geq 0}$  converge vers  $x^*$  plus vite que toute exponentielle. On dit que  $x^*$  est un point fixe hyper-attractif.

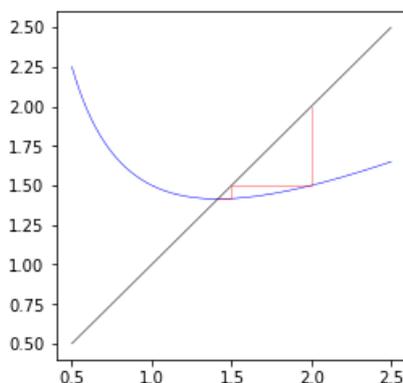


Diagramme en toile d'araignée pour  $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{x}$  avec pour valeur initiale 2. Le point  $\sqrt{2}$  est hyper-attractif.

Si la fonction  $f$  est de classe  $C^2$ , on peut donner une borne quantitative plus fine sur sa vitesse de convergence.

**Theorem 1.2.** Soit  $D$  un intervalle ouvert et  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^2$ . Soit  $x^* \in D$  tel que  $f(x^*) = x^*$ . Supposons que  $f'(x^*) = 0$ . Alors il existe un intervalle ouvert  $x^* \in I \subset D$  tel que :

- $f(I) \subset I$  ;
- pour tout  $x \in I$ , la suite  $(x_n)_{n \geq 0}$  définie par l'Équation (1.1) converge vers  $x^*$  ;
- il existe une constante  $C > 0$  telle que, pour tout  $n \geq 0$  et  $x \in I$ ,

$$|x_n - x^*| \leq e^{-C(2^n)}. \tag{1.4}$$

### 1.3 Point fixe neutre

Le cas des points fixes neutres (dérivée de 1 ou  $-1$  au point fixe) est un peu différent, car on ne peut en général pas trouver d'intervalle ouvert contenant le point fixe  $x^*$  vérifiant les conditions précédentes. Par exemple, en posant  $f : x \mapsto x + x^2$  sur  $\mathbb{R}$ , le point 0 est un point fixe neutre. On peut montrer par récurrence que la suite par l'Équation (1.1) est croissante, tend vers 0 si  $x \in I := [-1, 0]$ , et tend vers  $+\infty$  sinon. En particulier, le point fixe 0 est à l'extrémité de l'intervalle de convergence  $I$ .

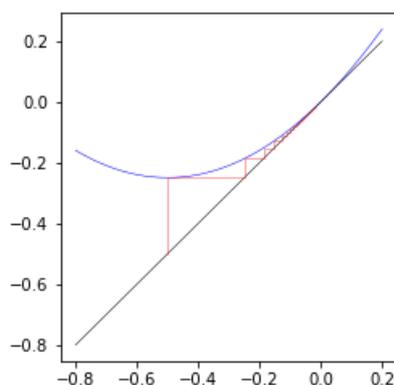


Diagramme en toile d'araignée pour  $f(x) = x^2 + x$  avec pour valeur initiale  $-0,5$ .

Dans ce cas, la convergence n'est pas à vitesse exponentielle, mais en général à vitesse polynomiale. Un résultat typique est le suivant :

**Theorem 1.3.** Soit  $D$  un intervalle ouvert et  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^2$ . Soit  $x^* \in D$  tel que  $f(x^*) = x^*$ . Supposons que  $f'(x^*) = 1$  et  $f''(x^*) > 0$ . Alors il existe  $x' < x^*$  tel que :

- $f((x', x^*)) \subset (x', x^*)$  ;
- pour tout  $x \in (x', x^*)$ , la suite  $(x_n)_{n \geq 0}$  définie par l'Équation (1.1) converge vers  $x^*$  ;
- il existe une constante  $C > 0$  telle que, pour tout  $n \geq 0$  et  $x \in (x', x^*)$ ,

$$|x_n - x^*| \leq \frac{C}{n+1}. \quad (1.5)$$

Remarquons que ce théorème ne traite que des points fixes en lesquels  $f$  a une dérivée de 1 et une dérivée seconde strictement positive. Cet énoncé est à adapter si  $f$  a une dérivée seconde strictement négative ou une dérivée de  $-1$ , essentiellement en remplaçant si nécessaire l'intervalle  $(x', x^*)$  par un intervalle de la forme  $[x^*, x')$ . Les diagrammes en toile d'araignée sont ici très pratiques pour ne pas se tromper de signe.

Si la dérivée seconde de  $f$  s'annule au point fixe, c'est le terme suivant, s'il existe, dans le développement de Taylor de  $f$  en  $x^*$  qui va contraindre le comportement de la suite  $(x_n)_{n \geq 0}$ . Par exemple, pour  $f : x \mapsto \sin(x)$  sur  $\mathbb{R}$ , le développement limité à l'ordre 3 de  $f$  en 0 est  $x - x^3/6 + o(x^3)$ , et on obtient la vitesse de convergence :

$$|x_n - x^*| \leq \frac{C}{\sqrt{n+1}},$$

pour tout  $x \in \mathbb{R}$  et tout  $n \geq 0$ .

## 2 Le cas des suites logistiques

Cet atelier porte sur les suites logistiques. Celles-ci sont définies par récurrence en utilisant la fonction

$$f_\mu : \begin{cases} [0, 1] & \rightarrow [0, 1], \\ x & \mapsto \mu x(1-x), \end{cases}$$

où  $\mu \in [0, 4]$  (ce qui assure que  $f_\mu([0, 1]) \subset [0, 1]$ ), et un point de départ  $x \in [0, 1]$ .

### 2.1 Paramètres d'intérêt

Soit  $\mu \in [0, 4]$ . Les points fixes de  $f_\mu$  sont solutions de l'équation

$$\begin{cases} \mu x(1-x) = x, \\ x \in [0, 1]. \end{cases}$$

Cette équation a une solution triviale :  $x = 0$ . En factorisant, on trouve une deuxième solution  $x_\mu^* := 1 - \mu^{-1}$ , qui appartient à  $[0, 1]$  et est différente de 0 si et seulement si  $\mu \in (1, 4]$ . Ainsi,  $f_\mu$  a un unique point fixe dans  $[0, 1]$  pour  $\mu \in [0, 1]$ , et deux points fixes pour  $\mu \in (1, 4]$ .

En dérivant  $f_\mu$ , on trouve :

$$f'_\mu(0) = \mu,$$

$$f'_\mu(x_\mu^*) = 2 - \mu.$$

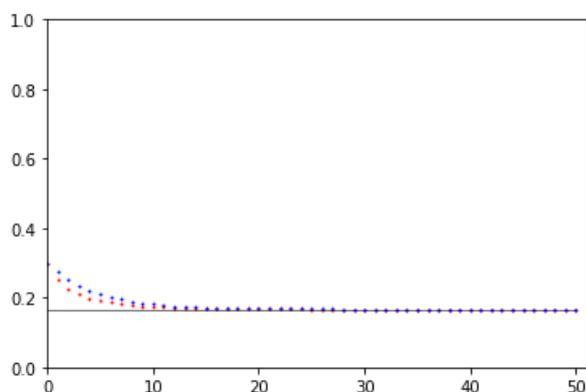
Ainsi, le point fixe 0 est hyper-attractif pour  $\mu = 0$ , attractif pour  $\mu \in (0, 1)$ , et neutre pour  $\mu = 1$ . Le point fixe  $x_\mu^*$  est hyper-attractif pour  $\mu = 2$ , attractif pour  $\mu \in (1, 2) \cup (2, 3)$ , et neutre pour  $\mu = 3$ .

La même chose s'observe plus loin dans la cascade de doublements de périodes. Par exemple, pour  $\mu \in (3, 1 + \sqrt{6}]$ , l'orbite de presque tout point  $x$  est attirée par un cycle de période 2. Or les points de période 2 sont des points fixes de  $f_\mu^2$ , qui est un polynôme de degré 4. On peut encore analyser la nature de ces points fixes, qui sont hyper-attractifs pour  $\mu = 1 + \sqrt{5}$ , attractifs pour  $\mu \in (3, 1 + \sqrt{5}) \cup (1 + \sqrt{5}, 1 + \sqrt{6})$ , et neutres pour  $\mu = 1 + \sqrt{6}$ .

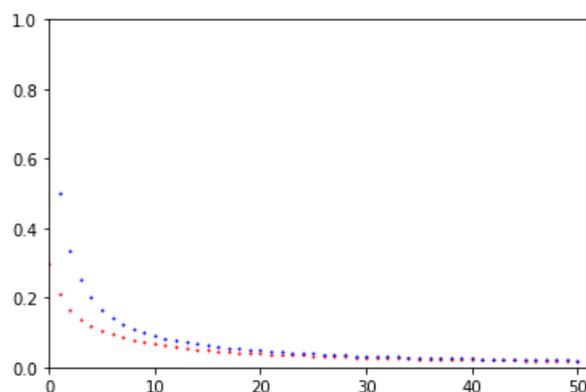
Plus généralement, dans la plage de paramètres  $(\mu_{\min}, \mu_{\max}]$  où il existe un cycle attractif de période  $2^n$ , ce cycle va être hyper-attractif pour un paramètre  $\mu_0 \in (\mu_{\min}, \mu_{\max})$ , attractif pour  $\mu \in (\mu_{\min}, \mu_0) \cup (\mu_0, \mu_{\max})$  et neutre pour  $\mu = \mu_{\max}$ .

## 2.2 Observation de la vitesse de convergence

La distinction entre point fixe (hyper-)attractif et point fixe neutre peut se faire avec chacun des outils présentés. Commençons par le graphe de la suite :



En rouge : sortie de `suite_graphe(ListeValeurs, 0, 1)` où `ListeValeurs` consiste en 50 itérations de  $f_{1,2}$ .  
 En bleu : une borne supérieure exponentielle.  
 En noir : la limite des deux suites.

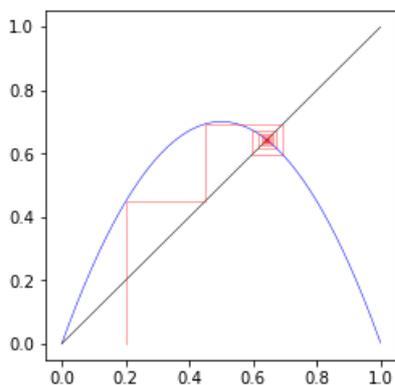


En rouge : sortie de `suite_graphe(ListeValeurs, 0, 1)` où `ListeValeurs` consiste en 50 itérations de  $f_1$ .  
 En bleu : une borne supérieure polynomiale.

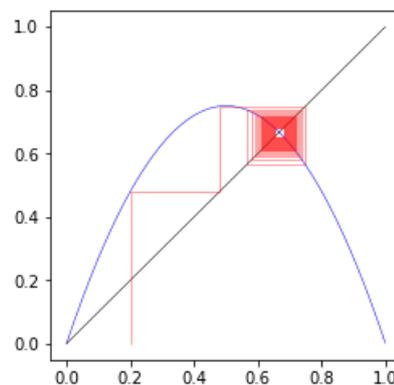
Avec le paramètre  $\mu = 1,2$  et une valeur initiale de  $x = 0,3$ , la suite  $(x_n)_{n \geq 0}$  converge vers  $x_{1,2}^* = 1/6$  à vitesse exponentielle. Plus précisément, on peut montrer par récurrence que, pour ce choix de  $x$ , on a  $0 \leq (x_n - 1/6) \leq (0,3 - 1/6) \times 0,8^n$  pour tout  $n$ . Cette borne supérieure est tracée en bleu.

Avec le paramètre  $\mu = 1$ , la suite  $(x_n)_{n \geq 0}$  converge vers 0 à vitesse polynomiale. Plus précisément, on peut montrer par récurrence que, pour ce choix de  $x$ , on a  $0 \leq x_n \leq 1/(n + 1)$  pour tout  $n$ . Cette borne supérieure est tracée en bleu.

Passons maintenant aux diagrammes en toile d'araignée :



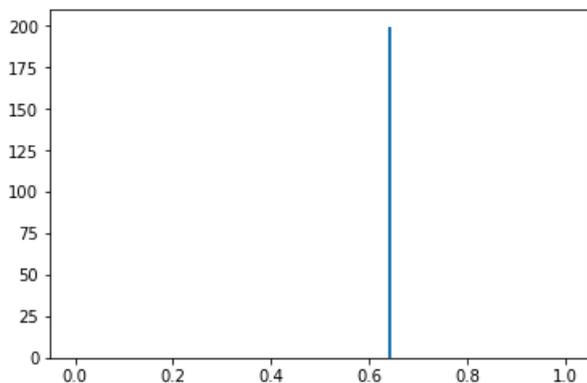
Sortie de  
`graphe_fonction(fonction, 0, 1)`  
`suite_araignee (Toile)`  
 où Toile consiste en 200 itérations de  $f_{2,8}$  partant de  $x = 0, 2$ .



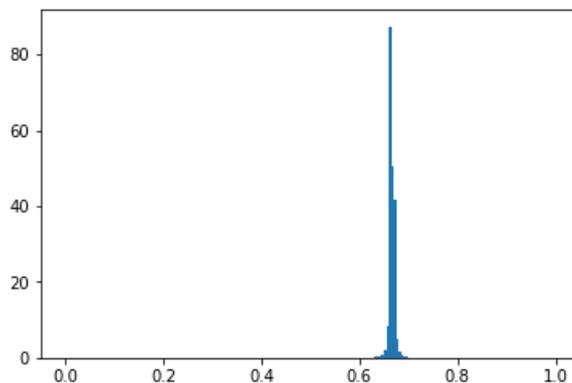
Sortie de  
`graphe_fonction(fonction, 0, 1)`  
`suite_araignee (Toile)`  
 où Toile consiste en 200 itérations de  $f_3$  partant de  $x = 0, 2$ .

Le paramètre  $\mu = 2, 8$  correspond à une convergence à vitesse exponentielle vers  $x_{2,8}^* = 9/14$ , alors que le paramètre  $\mu = 3$  correspond à une convergence à vitesse polynomiale vers  $x_3^* = 3/4$ . La ligne brisée de gauche s'approche manifestement de son point fixe beaucoup plus vite que la ligne brisée de droite.

Passons finalement aux histogrammes :



Sortie de  
`suite_histogramme(ListeValeurs, 0, 1, 200)`  
 où ListeValeurs consiste en  $10^4$  itérations de  $f_{2,8}$  partant de  $x = 0, 2$ .



Sortie de  
`suite_histogramme(ListeValeurs, 0, 1, 200)`  
 où ListeValeurs consiste en  $10^4$  itérations de  $f_{2,8}$  partant de  $x = 0, 2$ .

Le paramètre  $\mu = 2, 8$  correspond à une convergence à vitesse exponentielle vers  $x_{2,8}^* = 9/14$ . Presque toutes les valeurs de la suite  $(x_n)_{n \geq 0}$  sont dans la même classe que  $9/14$ , et donc l'histogramme ne présente qu'un seul pic.

Le paramètre  $\mu = 3$  correspond à une convergence à vitesse polynomiale vers  $x_3^* = 2/3$ . Cette convergence étant plus lente, si l'histogramme a suffisamment de classes, un nombre non négligeable de valeurs de la suite  $(x_n)_{n \geq 0}$  vont tomber dans les classes voisines de celle de  $x_3^* = 2/3$ , d'où l'étalement observé.

Cependant, c'est l'affichage de la liste des valeurs en haute précision qui permet de les distinguer le plus clairement les points fixes neutres, attractifs et hyper-attractifs.

### 2.2.1 Cas d'un point fixe attractif

Concentrons-nous sur les plage de paramètres  $(1, 2)$  et  $(2, 3)$ , pour lesquels  $x_\mu^*$  est un point fixe attractif. Posons  $p(n) := -\log_{10}(|x_n - x_\mu^*|)$ , de telle sorte que

$$|x_n - x_\mu^*| = 10^{-p(n)},$$

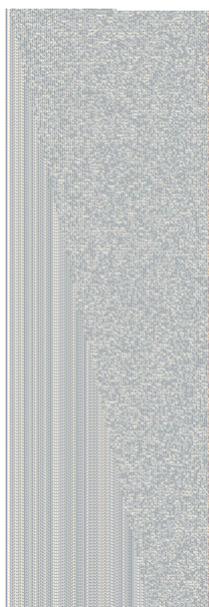
c'est-à-dire, grossièrement, que les développements décimaux de  $x_n$  et de  $x_\mu^*$  ont leurs  $p(n)$  premières décimales identiques. Alors, d'après l'Équation (1.3),

$$p(n) \sim_{n \rightarrow +\infty} -\log_{10}(|f'_\mu(x_\mu^*)|)n = -\log_{10}(|\mu - 2|)n.$$

Autrement dit, si l'on considère la suite  $(x_n)_{n \geq 0}$  comme une suite d'approximations de  $x_\mu^*$ , alors le nombre de bonnes décimales croît linéairement en  $n$ , le coefficient directeur étant donné par  $-\log_{10}(|2 - \mu|)$ .

Expérimentalement, on peut commencer par observer cette croissance linéaire du nombre de bonnes décimales avec  $n$ , puis estimer le coefficient directeur correspondant. Avec les outils de l'atelier, cela peut se faire de deux façons.

### 2.2.2 Observations pour un point fixe attractif : affichage des valeurs



Affichage des 200 premières itérations de  $f_{\sqrt{6}}$  avec un précision de 100 décimales.

Premièrement, on peut utiliser l'affichage des valeurs de la suite en précision suffisamment élevée. On affiche par exemple les 200 premières valeurs de la suite, et on regarde le nombre de décimales stables après 200 itérations (c'est-à-dire le nombre de décimales initiales communes à  $x_{199}$  et  $x_{200}$ ). Ce nombre est, à peu de choses près,  $p(200)$ . Le coefficient directeur recherché est d'environ  $p(200)/200$ .

Pour résumer, et en évitant les logarithmes, on suppose que  $|x_n - x_\mu^*| \simeq \lambda^n$  pour un certain réel  $\lambda$ . On a alors  $\lambda^{200} \simeq 10^{-p(200)}$ , où  $p(200)$  est le nombre de bonnes décimales après 100 itérations. On trouve donc  $\lambda \simeq 10^{-p(200)/200}$ . En appliquant cela à la suite logistique, les valeurs trouvées numériquement pour  $\lambda$  sont très proches de  $|2 - \mu|$ .

Dans l'exemple ci-contre, on obtient environ 69 bonnes décimales après 200 itérations. On a donc  $\lambda \simeq 10^{-69/200} \simeq 0,452$ , en bon accord avec la valeur théorique de  $|2 - \sqrt{6}| \simeq 0,449$ .

### 2.2.3 Observations pour un point fixe attractif : algorithme de seuil

Deuxièmement, on peut utiliser un algorithme de seuil en haute précision. On fixe  $p$ , et l'algorithme nous renvoie le premier  $n_0$  tel que  $|x_{n_0} - x_{n_0-1}| < 10^{-p}$ . Or  $|x_{n_0} - x_{n_0-1}|$  et  $|x_{n_0} - x_\mu^*|$  sont du même ordre. On a donc  $p(n_0) \simeq p$ , et le coefficient directeur recherché est d'environ  $p/n_0$ .

Pour résumer, et en évitant les logarithmes, on suppose que  $|x_n - x_\mu^*| \simeq \lambda^n$  pour un certain réel  $\lambda$ . On a alors  $\lambda^{n_0} \simeq 10^{-p}$ , où  $n_0$  est le temps d'arrêt de l'algorithme de seuil  $10^{-p}$ . On trouve donc  $\lambda \simeq 10^{-p/n_0}$ .

Pour reprendre l'exemple précédent de  $f_{\sqrt{6}}$  : un algorithme de seuil, fixé au seuil de  $10^{-100}$ , s'arrête après 286 itérations. On a donc  $\lambda^{286} \simeq 10^{-100}$ , soit  $\lambda \simeq 10^{-100/286} \simeq 0,447$ , là encore en bon accord avec la valeur théorique de  $|2 - \sqrt{6}| \simeq 0,449$ .

### 2.2.4 Points fixes hyper-attractifs et neutres

Pour  $\mu = 2$ , le point fixe  $1/2$  est hyper-attractif. D'après le théorème 1.2, il existe une constante  $C$  telle que, pour toute valeur de  $x$  suffisamment proche de  $1/2$ ,

$$\left| x_n - \frac{1}{2} \right| \leq 10^{-C(2^n)}.$$

Ainsi, le nombre de "bonnes décimales"<sup>1</sup> de  $x_n$  est de l'ordre de  $C2^n$ , et croît donc exponentiellement avec  $n$ . On obtient très vite beaucoup de décimales exactes ; comme l'exemple ci-dessous le montre, on obtient 100 décimales exactes en 10 itérations.

<sup>1</sup>Le nombre  $1/2$  étant décimal et la suite  $(x_n)_{n \geq 0}$  croissante à partir d'un certain rang, il s'agit plutôt du nombre initial de 9 dans le développement décimal de  $x_n$ .

