Ergodicité de transformations chaotiques

Dans tout ce développement, on travaillera avec la transformation logistique de paramètre 4 :

$$f_4 : \left\{ \begin{array}{rcl} [0,1] & \to & [0,1], \\ x & \mapsto & 4x(1-x). \end{array} \right.$$

Étant donné un point $x \in [0,1]$, on définit par récurrence une suite $(x_n)_{n\geq 0}$:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_0 & = & x\,; \\ x_{n+1} & = & f_4(x_n) \quad \forall n \geq 0. \end{array} \right. \tag{0.1}$$

1 Équidistribution temporelle

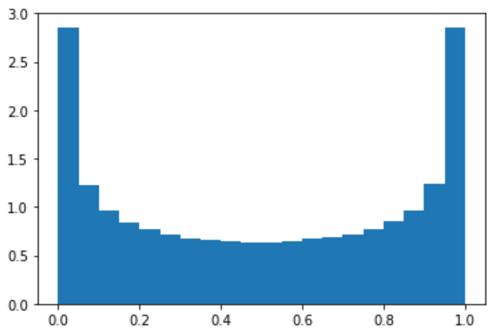
Comme on peut l'observer avec la plupart des outils à disposition (graphe de la suite, diagramme en toile d'araignée, liste des valeurs de la suite), les valeurs successives de la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ dépendent fortement de la valeur de x. On va s'intéresser aux propriétés *statistiques* de cette suite, qui seront robustes.

Afin de pouvoir observer facilement le comportement de la suite pour des valeurs initiales x différentes, on va tirer la valeur de x au hasard uniformément[1] dans l'intervalle $[0,1]$:

```
x = numpy.random.uniform(0, 1)
```

On va tracer l'histogramme du N-uplet $(x_n)_{0\leq n\leq N-1}$ pour une valeur de N assez élevée, afin de voir comment les valeurs de la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ se répartissent dans l'intervalle $[0,1]$. Tout ce qui suit sera valable pour *presque toute* valeur de x, mais peut être faux pour des valeurs particulières, telles que 0, $1/2$ ou 1.

Fixons le nombre de classes. Quand on prend des valeurs de N suffisamment grandes, on voit que l'histogramme converge vers un histogramme limite, qui ne dépend pas du point x choisi (il suffit de refaire l'expérience avec d'autres nombres x choisis au hasard pour s'en convaincre) :



Histogramme des 10^6 premières valeurs de la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ avec 20 classes.

Soit $[a_k, a_{k+1}]$ une des classes de l'histogramme. Par définition d'un histogramme, la hauteur de la barre correspondante est de $\#\{n < N :\ x_n \in [a_{k+1} - a_k]\}/(N(a_{k+1} - a_k))$. La convergence des histogrammes signifie donc qu'il existe une constante $c_k > 0$ telle que :

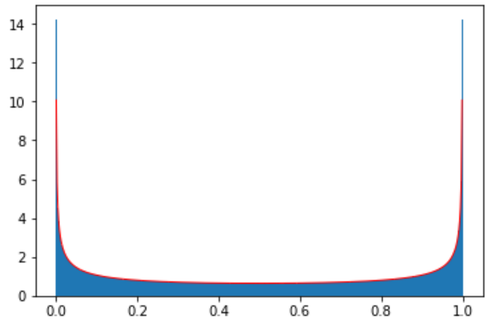
$$\lim_{N\to+\infty} \frac{\#\{n < N :\ x_n \in [a_{k+1} - a_k]\}}{N(a_{k+1} - a_k)} = c_k.$$

La constante c_k est connue (par des moyens non élémentaires) :

$$c_k = \frac{1}{(a_k - a_{k+1})} \int_{a_k}^{a_{k+1}} \frac{1}{\pi\sqrt{x(1-x)}}\, \mathrm{d}x.$$

Cela a deux conséquences. D'une part, si la classe $[a_k, a_{k+1}]$ est suffisamment fine, alors la fonction $\varphi(x) := \frac{1}{\pi\sqrt{x(1-x)}}$ est presque constante sur cette intervalle, et donc presque égale à sa valeur moyenne c_k. L'histogramme devrait donc être proche du graphe de la fonction φ, ce qui s'observe expérimentalement :

[1] Il existe de nombreuses façons de tirer au hasard un nombre, et le choix d'un tirage uniforme n'est pas innocent !



Histogramme des 10^8 premières valeurs de la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ avec 500 classes. Le graphe de φ est superposé en rouge.

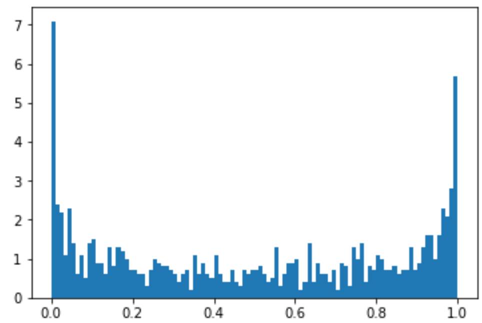
D'autre part, cette convergence est valable quelques soient les valeurs de a_k et a_{k+1}. Autrement dit, pour tout sous-intervalle $I \subset [0,1]$,

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{\#\{n < N :\ x_n \in I\}}{N} = \int_I \frac{1}{\pi\sqrt{x(1-x)}}\,\mathrm{d}x. \tag{1.1}$$

La *distribution temporelle* des valeurs de $(x_n)_{0\leq n\leq N-1}$, mise en évidence par des histogrammes assez fins, converge donc vers la distribution limite $\varphi(x)\,\mathrm{d}x$. Ceci est valable pour presque tout point de départ x.

Pour tout sous-intervalle $I \subset [0,1]$, par l'Équation (1.1), la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ va passer une proportion positive de son temps dans l'intervalle I. Ceci étant vrai pour tout I, aussi petit soit-il, les valeurs de la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ sont denses dans $[0,1]$. Ce comportement est extrêmement différent de celui d'une suite convergente !

Remarque 1.1 (Vitesse de convergence)**.**
Pour des raisons liées au théorème central limite (en toute rigueur, au théorème de Donsker pour des processus chaotiques), si l'on dispose de C classes dans l'histogramme, il faut que le nombre d'itérations N soit au moins de l'ordre de C^2. Si N est trop petit, alors l'histogramme sera bruité :

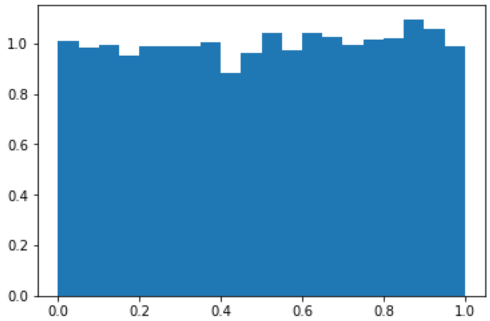


Histogramme des $N = 10^3$ premières valeurs de la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ avec $C = 100$ classes.

2 Équidistribution spatiale

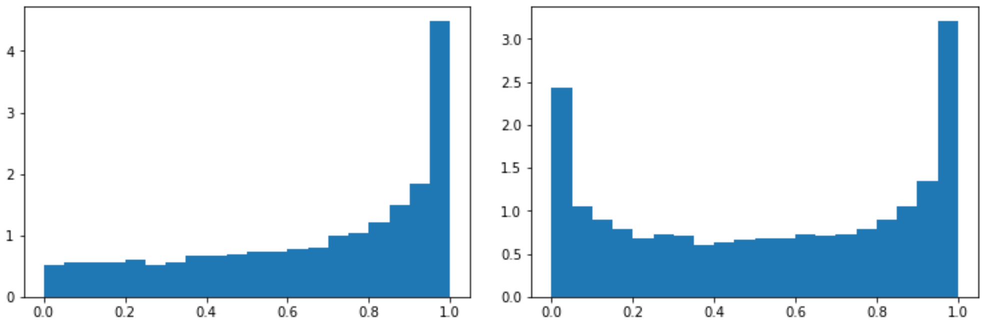
Au lieu de tirer une seule valeur initiale x, on va tirer un grand nombre de valeurs initiales indépendamment. Ce point de vue intervient naturellement en physique : dans ce cadre, la transformation f_4 peut décrire l'évolution d'un système physique, et les valeurs initiales correspondent un grand nombre de particules indépendantes soumises à cette évolution.

Si l'on tire ces valeurs initiales uniformément alors, par la loi des grands nombres, elles seront à peu près uniformément réparties dans $[0,1]$. Cela peut se voir grâce à un histogramme.



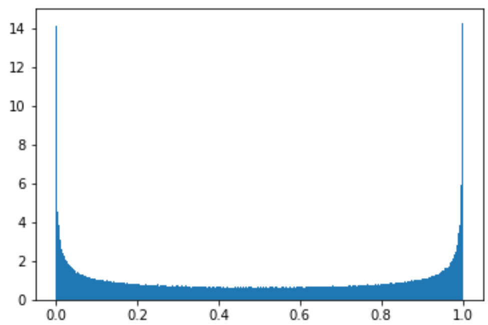
Histogramme des valeurs de 10^4 réels tirés uniformément dans $[0, 1]$ et répartis en 20 classes.

On peut appliquer la transformation f_4 à chacune de ces valeurs. On observe que l'histogramme est modifié. On peut continuer à appliquer f_4, et observer comment l'histogramme correspondant évolue. Physiquement, cela correspond à l'observation de la distribution des particules au temps 1, au temps 2, etc.



À gauche : histogramme des valeurs de $f_4(x)$ pour 10^4 réels x tirés uniformément dans $[0, 1]$, avec 20 classes. À droite : de même avec $f_4(f_4(x))$.

On observe que l'histogramme s'est rapproché de celui observé dans la première partie ! Ceci est de plus en plus marquant au fur et à mesure que l'on itère le système.



Histogramme des valeurs de $f_4^{(100)}(x)$ pour 10^6 réels x tirés uniformément dans $[0, 1]$, avec 500 classes.

Si l'on attend suffisamment, la *distribution spatiale* des particules se rapproche donc de la distribution temporelle observée en première partie. En physique, ce fait est appelé **hypothèse ergodique**, et fut formulé par Ludwig Boltzmann en 1871 : en présence d'un système chaotique, comme un gaz, la distribution spatiale des particules est identique à la distribution temporelle d'une particule.