TD semaine 2, bis : Résolution de système 3×3

Dans la première feuille de TD, certains systèmes de 3 équations à 3 inconnues apparaissent. Voici un exemple de résolution de tels systèmes. Au vu du temps nécessaire et du risque d'erreur, **il ne sera pas exigé de résoudre de tels systèmes**.

Le système que nous allons résoudre est le suivant (TD1, exercice facultatif) :

$$\left\{ \begin{array}{rcr} 2x - 3y + 5z & = & 110 \\ 5x - 2y + 4z & = & 130 \\ 6x + 3y - 4z & = & 0 \end{array} \right.$$

Nous allons procéder par substitution. La méthode de combinaison linéaire peut aussi s'appliquer à cette situation (et est souvent plus efficace).

Nous allons donc choisir une première variable, que nous allons exprimer en fonction des deux autres. Par exemple, nous pouvons utiliser la première équation pour exprimer x en fonction de y et z :

$$\begin{aligned} 2x &= 110 + 3y - 5z \\ x &= 55 + \frac{3}{2}y - \frac{5}{2}z \end{aligned}$$

Nous allons ensuite remplacer x par cette expression dans les deux équations suivantes. La seconde équation devient :

$$\begin{aligned} 5\left(55 + \frac{3}{2}y - \frac{5}{2}z\right) - 2y + 4z &= 130 \\ 275 + \frac{15}{2}y - \frac{25}{2}z - 2y + 4z &= 130 \\ \frac{11}{2}y - \frac{17}{2}z &= -145 \\ 11y - 17z &= -290, \end{aligned}$$

et la troisième :

$$\begin{aligned} 6\left(55 + \frac{3}{2}y - \frac{5}{2}z\right) + 3y - 4z &= 0 \\ 330 + 9y - 15z + 3y - 4z &= 0 \\ 12y - 19z &= -330. \end{aligned}$$

Pour trouver y et z, il nous reste à résoudre le système d'équations :

$$\left\{ \begin{array}{rcr} 11y - 17z & = & -290 \\ 12y - 19z & = & -330 \end{array} \right.$$

Là encore, on procède par substitution. En utilisant la première équation, on trouve :

$$\begin{aligned} 11y &= 17z - 290 \\ y &= \frac{17}{11}z - \frac{290}{11} \end{aligned}$$

En remplaçant y par cette expression dans la seconde équation, on trouve :

$$\begin{aligned}
12\left(\frac{17}{11}z - \frac{290}{11}\right) - 19z &= -330 \\
\frac{204}{11}z - \frac{3480}{11} - 19z &= -330 \\
204z - 3480 - 209z &= -3630 \\
-5z &= -150 \\
z &= 30
\end{aligned}$$

De là, on retrouve y et x :

$$\begin{aligned}
y &= \frac{17}{11}z - \frac{290}{11} = \frac{17}{11} \times 30 - \frac{290}{11} = \frac{510 - 290}{11} = \frac{220}{11} = 20, \\
x &= 55 + \frac{3}{2}y - \frac{5}{2}z = 55 + \frac{3}{2} \times 20 - \frac{5}{2} \times 30 = 55 + 30 - 75 = 10.
\end{aligned}$$

Le système a donc pour (unique) solution $x = 10$, $y = 20$ et $z = 30$.