TD semaine 3 : Évolution à taux constant

L'objectif de la semaine est de modéliser des phénomènes en faisant appel à des évolutions à taux constant.

Considérons l'énoncé suivant :

> Une entreprise en ligne a 1 200 clients réguliers au 1er janvier 2020. Son nombre de clients augmente de 20% par an. Combien aura-t-elle de clients au 1er janvier 2023 ? Au 1er mars 2024 ? Combien avait-elle de clients au 1er juillet 2019 ?

En première approximation, on peut supposer que le nombre de clients suit une évolution à taux constant, au taux de 20% par **an**. On note C_n le nombre de clients dans n **années** (attention : il faut que les unités restent cohérentes !) après le 1er janvier 2020, c'est-à-dire au 1er janvier 2020+n. Comme ce nombre de clients suit une évolution à taux constant,

$$C_n = C_0(1+t)^n. \tag{0.1}$$

D'après les données du problème, $C_0 = 1\,200$ et $t = 20\% = \frac{20}{100} = 0{,}2$. Par conséquent,

$$C_n = 1\,200(1+0{,}2)^n = 1\,200 \times 1{,}2^n.$$

Du 01/01/2020 au 01/01/2023, il se sera écoulé exactement 3 ans. Si la croissance de l'entreprise continue au même rythme, le nombre de clients au 01/01/2023 sera donc de

$$C_3 = 1\,200 \times 1{,}2^3 = 1\,200 \times 1{,}728 \simeq 2\,074.$$

Comme vu dans le cours, l'équation (0.1) reste valable pour des valeurs non entières de n. Du 01/01/2020 au 01/03/2024, il se sera écoulé exactement 4 ans et 2 mois. On convertit cette durée en années : comme 1 mois vaut $\frac{1}{12}$ ans, cette durée est de $4 + \frac{2}{12} \simeq 4{,}167$ ans. Le nombre de clients au 01/03/2024 sera donc de

$$C_{4{,}167} = 1\,200 \times 1{,}2^{4{,}167} \simeq 1\,200 \times 2{,}138 \simeq 2\,565.$$

Comme vu dans le cours, l'équation (0.1) reste aussi valable pour des valeurs négative de n. Cela correspond à des dates dans le passé, ici antérieures au 01/01/2020. Du 01/07/2019 au 01/01/2020, il s'est écoulé exactement 6 mois ; la première date est donc 6 mois = 0,5 an dans le passé. Le nombre de clients au 01/07/2019 était donc de

$$C_{-0{,}5} = 1\,200 \times 1{,}2^{-0{,}5} \simeq 1\,200 \times 0{,}913 \simeq 1\,095.$$