TD SEMAINE 1 : SYSTÈMES LINÉAIRES

Considérons un système d'équations :

$$(S)\ :\ \left\{\begin{array}{lcl} 2x-5y & = & 1 \\ x-2y & = & -3 \end{array}\right.$$

On cherche à résoudre ce système, c'est-à-dire à trouver les valeurs de x et y qui satisfont ces deux équations simultanément.

RÉSOLUTION

La méthode par *substitution* est la plus simple, et est très efficace pour un système de deux équations à deux inconnues. On va utiliser une des deux équations pour exprimer une varaible en fonction de l'autre. Dans cet exemple, la seconde équation peut être utilisée pour exprimer x en fonction de y :

$$x-2y=-3 \quad \Leftrightarrow \quad x=-3+2y$$

Le système initial est donc équivalent à :

$$(S) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} 2x-5y & = & 1 \\ x & = & -3+2y \end{array}\right.$$

On peut ensuite remplacer x par cette fonction de y dans la première équation (attention aux parenthèses !), et simplifier.

$$(S) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} 2(-3+2y)-5y & = & 1 \\ x & = & -3+2y \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} -6+4y-5y & = & 1 \\ x & = & -3-2y \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} -6-y & = & 1 \\ x & = & -3-2y \end{array}\right.$$

La première équation ne fait alors intervenir que la variable y, et peut donc être résolue.

$$(S) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} -y & = & 7 \\ x & = & -3-2y \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} y & = & -7 \\ x & = & -3-2y \end{array}\right.$$

On connaît donc la valeur de y, et on a exprimé x en fonction de y. On peut alors déterminer la valeur de x :

$$(S) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} -y & = & 7 \\ x & = & -3-2(-7) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} y & = & -7 \\ x & = & 11 \end{array}\right.$$

Le système a donc pour unique solution $x=11$ et $y=-7$.

POUR ALLER PLUS LOIN

Tous les systèmes d'équations n'ont pas une unique solution. Certains systèmes ont une infinité de solution, par exemple :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x+y & = & 1 \\ x+y & = & 1 \end{array}\right.$$

D'autres n'ont aucune solution :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x+y & = & 1 \\ x+y & = & 2 \end{array}\right.$$

Ces cas particuliers apparaissent clairement lors de la résolution (on tombe des égalités triviales du type $0=0$, ou toujours fausses, du type $1=0$).

La méthode de substitution peut être utilisée pour des systèmes de trois équations à trois inconnues (ou plus), comme par exemple :

$$\left\{\begin{array}{lcl} 2x-5y+3z & = & 1 \\ x-y-z & = & 1 \\ x+y+z & = & 6 \end{array}\right.$$

Dans ce cas, on utilise une équation pour exprimer z en fonction de x et y. On substitue z par cette expression dans les deux autres équations. On retrouve alors un système de deux équations à deux inconnues, que l'ont peut encore résoudre par substitution. Cependant, les calculs deviennent très vite trop compliqués pour être fait à la main ; il faut alors utiliser une calculatrice ou un ordinateur.

D'autres méthodes de résolution existent, comme la méthode de *combinaison linéaire*. Elle ne sera pas abordée dans ce cours, mais si vous la maîtrisez déjà, n'hésitez pas à l'utiliser !