

TD SEMAINE 4 : RECHERCHE ET CONVERSION DE TAUX

Les objectifs de la semaine sont de calculer et convertir des taux de croissance.

CALCUL DE TAUX

Considérons l'énoncé suivant :

Une entreprise a 2 300 clients réguliers au 1er janvier 2015, et 1 200 clients au 1er janvier 2020. Quel est son taux de croissance annuel moyen durant cette période ?

On suppose que le nombre de clients de l'entreprise suit une évolution à taux **annuel** constant t sur cette période. Soit C_n le nombre de clients n **années** après le 01/01/2015. Alors :

$$C_n = C_0(1 + t)^n.$$

On connaît $C_0 = 2\,300$, ainsi que $C_5 = 1\,200$ pour $n = 5$ (il s'est écoulé exactement 5 ans entre le 01/01/2015 et le 01/01/2020). Par conséquent,

$$1\,200 = 2\,300(1 + t)^5.$$

On cherche le taux t . Pour cela, on isole tout d'abord la quantité $(1 + t)^5$ pour se ramener à une équation puissance :

$$(1 + t)^5 = \frac{1\,200}{2\,300} \simeq 0,522.$$

Ensuite, on élève les deux membres de l'équation à la puissance $1/5$:

$$1 + t = ((1 + t)^5)^{\frac{1}{5}} = \left(\frac{1\,200}{2\,300}\right)^{\frac{1}{5}} \simeq 0,878.$$

Enfin, en soustrayant 1 de chaque côté, on trouve $t \simeq 0,878 - 1 = -0,122 = -12,2\%$. L'entreprise a donc un taux de croissance de $-12,2\%$ par an ; autrement dit, elle perd $12,2\%$ de sa clientèle chaque année.

CONVERSION DE TAUX

Ce type de calcul peut être utilisé pour convertir des taux annuels en taux mensuels, ou vice-versa.

Le chiffre d'affaires de l'entreprise A croît à un taux mensuel de -10% . Quel est son taux de croissance annuel ?

Le chiffre d'affaires de l'entreprise B croît à un taux annuel de -10% . Quel est son taux de croissance mensuel ?

Soient t_a et $t_m = -10\% = -0,1$ les taux de croissance respectivement annuel et mensuel du chiffre d'affaires de l'entreprise A . Après 1 an = 12 mois, le coefficient multiplicateur est de $1 + t_a = (1 + t_m)^{12}$. On trouve donc

$$1 + t_a = (1 - 0,1)^{12} = 0,9^{12} \simeq 0,28,$$

et donc $t_a \simeq 0,28 - 1 = -0,72 = -72\%$. L'entreprise A a un taux de croissance annuel de -72% .

Remarquons au passage que $t_a \neq 12 \times t_m = -120\%$.

Soient $s_a = -10\% = -0,1$ et s_m les taux de croissance respectivement annuel et mensuel du chiffre d'affaires de l'entreprise B . Après 1 an = 12 mois, le coefficient multiplicateur est de $1 + t_a = (1 + t_m)^{12}$. On trouve donc

$$(1 + t_m)^{12} = 1 + t_a = 1 - 0,1 = 0,9,$$

d'où :

$$1 + t_m = (1 + t_a)^{\frac{1}{12}} = 0,9^{\frac{1}{12}} \simeq 0,9913.$$

Par conséquent, $t_m \simeq 0,9913 - 1 = -0,0087 = -0,87\%$. L'entreprise B a un taux de croissance mensuel de $-0,87\%$.

On peut aussi faire des conversions entre taux mensuel et trimestriel (en utilisant $(1 + t_t) = (1 + t_m)^3$), entre taux trimestriel et annuel (en utilisant $(1 + t_a) = (1 + t_t)^4$), entre taux hebdomadaire et annuel (en utilisant $(1 + t_a) = (1 + t_h)^{52}$)...