Cours 5 : Logarithme et recherche de durée

On considère une grandeur (y_n) évoluant à taux constant. Comme vu lors des cours précédents,
$$y_n = y_0(1+t)^n,$$
où t est le taux de croissance. Connaissant le taux t et la valeur initiale y_0, on veut savoir combien de temps il faut pour atteindre une cible y_n fixée. Autrement dit, connaissant y_0, y_n et t, on cherche n.

Logarithme

Pour cela, il va falloir utiliser la fonction logarithme. Le **logarithme décimal** log d'un nombre $x > 0$ est la puissance de 10 auquel il correspond :
$$10^{\log(x)} = x.$$

Exemple : $\log(100) = 2$ car $10^2 = 100$; $\log(0{,}1) = -1$ car $10^{-1} = 0{,}1$; $\log(2) \simeq 0{,}301$ car $10^{0{,}301} \simeq 2$.

La fonction logarithme vérifie les propriétés suivantes (qui se déduisent des propriétés des puissances) :
- $\log(xy) = \log(x) + \log(y)$;
- $\log(b^x) = x\log(b)$;
- $\log(1) = 0$;
- $\log(10) = 1$.

Nous nous servirons essentiellement de la seconde de ces propriétés.

Recherche de durée

Soient $a > 0$, $b > 0$, n trois nombres tels que $b^n = a$. En prenant le logarithme de chaque côté, on trouve
$$\log(b^n) = n\log(b) = \log(a),$$
et donc :
$$n = \frac{\log(a)}{\log(b)}.$$

Exemple : La population d'une ville est de 100 000 habitants, et augment de 10% par an. Dans combien de temps aura-t-elle atteint 200 000 habitants ?

Soit n le nombre d'années avant que la population atteigne 200 000 habitants. Comme on a une évolution à taux constant,
$$200\,000 = 100\,000(1+0{,}1)^n,$$
et donc $2 = 1{,}1^n$. En appliquant la formule précédente, on trouve $n = \log(2)/\log(1{,}1) \simeq 7{,}27$ ans $\simeq 7$ ans et 3 mois. Remarquons au passage que si la population augmente de 10% par an, le temps de doublement est très inférieur à 10 ans !