Devoir maison de Mathématiques financières et statistiques - Corrigé

Pour ce corrigé, on utilisera la date de naissance du 10 mars 1997, soit :
- $\mathbf{a} = 10$;
- $\mathbf{b} = 3$;
- $\mathbf{c} = 1997$.

Pour votre corrigé, ces valeurs sont à remplacer par les votres. Les énoncés sont systématiquement réécrits avec ces valeurs, en notant en gras les endroits où elles apapraissent.

Exercice 1

L'entreprise Pomme Inc. a acheté pour **199700** euros de fournitures électroniques : des téléphones à 100 euros l'unité, des ordinateurs à 1200 euros l'unité et des serveurs à 5000 euros l'unité.

L'entreprise a acheté **10** ordinateurs de plus que de serveurs, mais au total, les serveurs ont coûté **150** fois plus cher que les téléphones.

On voudrait savoir combien d'appareils de chaque sorte l'entreprise a acheté.

Écrivez un système d'équations qui vous permettrait de répondre à cette question. **Il n'est pas demandé de résoudre ce système.**

Solution. On note t le nombre de téléphones, r le nombre d'ordinateurs et s le nombre de serveurs.

Commençons par le prix total :
Prix total = Prix des téléphones + Prix des ordinateurs + Prix des serveurs.
De plus,
Prix des téléphones = Prix d'un téléphone × Nombre de téléphones = $100t$.
De même, on trouve que le prix des ordinateurs est de $1200r$ euros, et celui des serveurs de $5000s$ euros. Finalement,

$$\begin{aligned} 100t + 1200r + 5000s &= 199700 \\ t + 12r + 50s &= 1997. \end{aligned}$$

L'affirmation "l'entreprise a acheté 10 ordinateurs de plus que de serveurs" se traduit par :
Nombre d'ordinateurs = 10 + Nombre de serveurs,
Soit :

$$\begin{aligned} r &= 10 + s \\ r - s &= 10. \end{aligned}$$

L'affirmation "les serveurs ont coûté 150 fois plus cher que les téléphones" se traduit par :
Prix des serveurs = 150× Prix des téléphones,
Soit :

$$\begin{aligned} 5000s &= 150 \times (100t) = 15000t \\ s &= 3t. \end{aligned}$$

On conclut que les inconnues t, r et s sont solutions du système :

$$\left\{\begin{array}{llllll} t & +12r & +50s & = & 1997 \\ & r & -s & = & 10 \\ 3t & & -s & = & 0 \end{array}\right. .$$

Exercice 2

Le nombre de loups dans une réserve naturelle suit une évolution à taux constant. Il y a actuellement **1997** individus, et la population augmente de **3**% par an. Combien y aura-t-il d'individus dans **10** mois ?

Solution. Soit L_n le nombre de loups après n *ans*[1]. La population de loups suit une évolution à taux constant, donc :

$$L_n = L_0(1+t)^n,$$

où $t = 3\% = 0,03$ est le taux de croissance *annuel*. Une durée de 10 mois $= \frac{10}{12}$ ans correspond au choix $n = \frac{10}{12}$, et :

$$L_{\frac{10}{12}} = 1997 \times (1+0,03)^{\frac{10}{12}} \simeq 2047.$$

Dans 10 mois, il y aura environ 2047 loups dans le parc.

Exercice 3

On considère l'équation suivante :

$$10(t+3)^{3+0,3} = 1997.$$

Trouvez la valeur de l'inconnue t.

Solution.

$$\begin{aligned} 10(t+3)^{3,3} &= 1997 \\ (t+3)^{3,3} &= \frac{1997}{10} \simeq 199,7 \\ t+3 &\simeq (199,7)^{\frac{1}{3,3}} \simeq 4,978337 \\ t &\simeq 4,978337 - 3 = 1,978337 \end{aligned}$$

On trouve[2] $t \simeq 1,978337$.

Exercice 4

Le chiffre d'affaire de l'entreprise Pomme Inc. augmente de **10**% par mois, alors que le chiffre d'affaire de l'entreprise Petit & Doux augmente de **3**% par semestre.

Convertissez ces taux de croissance en des taux de croissance annuels. Laquelle des deux entreprises croît le plus vite ?

Solution. Commençons par l'entreprise Pomme Inc. Soient t_m son taux de croissance mensuel et t_a son taux de croissance annuel. Il y a 12 mois dans une année, donc

$$\begin{aligned} 1+t_a &= (1+t_m)^{12} \\ 1+t_a &= \left(1+\frac{10}{100}\right)^{12} = 1,1^12 \simeq 3,138428 \\ t_a &= 1,1^{12} - 1 \simeq 2,138428 \simeq 214,84\%. \end{aligned}$$

1. Vu que l'on dispose du taux de croissance annuel, il est plus simple de mesurer la durée en années.

2. Il était aussi possible d'écrire la valeur exacte de t, qui est de $\left(\frac{1997}{10}\right)^{\frac{1}{3,3}} - 3$, puis de faire l'application numérique à la fin.

Passons à l'entreprise Petit & Doux. Soient t_s son taux de croissance semestriel et t_a son taux de croissance annuel. Il y a 2 semestres dans une année, donc

$$\begin{aligned} 1 + t_a &= (1 + t_s)^2 \\ 1 + t_a &= \left(1 + \frac{3}{100}\right)^2 = 1,03^2 = 1,0609 \\ t_a &= 1,0609 - 1 = 0,0609 = 6,09\%. \end{aligned}$$

L'entreprise Pomme Inc. croît plus vite que l'entreprise Petit & Doux, car son taux de croissance annuel est plus élevé.

Exercice 5

Le nombre de clients de l'entreprise JCN augmente de **3**% par an. Dans combien de temps aura-t-il été multiplié par **10** ?

Solution. Avant toutes choses, signalons que l'énoncé était erroné sur deux points :

— Il aurait fallu lire que le nombre de clients augmente de **b**% par an (et non **c**%) ;

— Pour les étudiants nés le premier du mois, la question n'est pas très intéressante (au bout de 0 années, le nombre de clients a été multiplié par 1). Dans ce cas, il aurait fallu par exemple remplacer **a** par 2.

Bien entendu, ces erreurs sont prises en compte dans la notation. La correction ci-dessous utilise l'énoncé corrigé. Dans votre auto-correction, vous pourrez utiliser la version de votre choix. Passons maintenant à la correction proprement dite.

On suppose que le nombre de clients de l'entreprise JCN suit une évolution à taux constant. Soit c_n le nombre de clients après n ans[3]. Alors :

$$c_n = c_0(1 + 0,03)^n = c_0 \times 1,03^n.$$

Après n ans, le nombre de clients a été multiplié par $1,03^n$. On cherche n tel que ce coefficient multiplicateur vaille 10, soit :

$$1,03^n = 10.$$

D'après le cours,

$$n = \frac{\log(10)}{\log(1,03)} \simeq 77,898457.$$

Le nombre de clients aura été multiplié par 10 dans $77,90$ ans, soit environ 77 ans et 11 mois[4].

Exercice 6

Une personne a ouvert un compte d'épargne au 01/**03**/**1997** (le premier de votre mois de naissance), et y a déposé 10 000 euros. Sept ans plus tard, elle a retiré **1 000** euros. Le taux d'intérêts est de 3% par an. Combien a-t-elle sur son compte au 01/01/2020 ?

Solution. Pour résoudre cet exercice, il y a deux grandes méthodes : on actualise le montant à chaque opération, ou on actualise chaque opération à la date actuelle. Cette correction fait le premier choix.

Au 01/03/1997, le montant disponible se monte à 10 000 euros.

Sept ans plus tard, au 01/03/2004, ce montant disponible s'élève à

$$10\,000 \times 1,03^7 - 1\,000 \simeq 12\,298,74 - 1\,000 = 11\,298,74 \text{ euros}.$$

3. Comme pour l'exercice 2, vu que l'on dispose du taux de croissance annuel, il est plus simple de mesurer la durée en années.

4. On peut s'interroger sur la pertinence d'un modèle d'évolution à taux constant sur une telle durée...

Du 01/03/2004 au 01/01/2020, il s'est écoulé 15 ans et 10 mois (10 mois du 01/03/2004 au 01/01/2005, puis 15 ans du 01/01/2005 au 01/01/2020), soit $15 + \frac{10}{12} \simeq 15,833333$ ans. Le montant disponible au 01/01/2020 s'élève donc à

$$11\,298,74 \times 1,03^{15,833333} \simeq 18\,042,05 \text{ euros.}$$