

## Chapitre 2. Éléments de mathématiques financières

Mathématiques et statistiques appliquées  
Département TC1-IUT de Sceaux

Damien THOMINE

### Objectifs

- Appliquer le modèle d'évolution à taux constant aux outils financiers : intérêts composés et actualisation.
- Savoir calculer les mensualités ou annuités d'un emprunt.

### Plan du cours

## Section 1

### Intérêts Composés

### Intérêts Composés

**Exemple.** Je mets 1000€ sur un livret A qui rémunère à hauteur de 1% par an. Si je ne fais rien, combien aurai-je d'argent au bout d'un an ? De 2 ans ? De 10 ans ?

$$C_0 = 1000\text{€}$$

$$C_1 = 1000 + 1000 \times 0,01 = 1000 \times 1,01 = 1010\text{€}$$

$$C_2 = C_1 + C_1 \times 0,01 = C_1 \times 1,01 = 1000 \times 1,01^2 \approx 1020,10\text{€}$$

...

...

$$C_{10} = 1000 \times 1,01^{10} \approx 1104,62\text{€}.$$

Un capital placé à **intérêts composés** à un taux fixé  $t$  suit une évolution à taux constant.

Si l'on possède un capital  $C_0$  aujourd'hui et que l'on le place à intérêts composés au taux  $t$ , alors au bout de  $n$  périodes de capitalisation, on dispose d'un capital de

$$C_n = C_0(1 + t)^n.$$

## Test

Un compte d'épargne garantit un taux d'intérêt de 3% par an

- On place 4000 € aujourd'hui.

Dans 7 ans on aura  $4\,000 \times 1,03^7 = 4919$

$C_0 = 4\,000$ ,  $t = 3\% = 0,03$  et  $n = 7$

- Il y a 10 ans, on avait placé un certain capital qui est arrivé aujourd'hui à 4000 €.

On avait placé  $4\,000 \times 1,03^{-10} = 2976\text{€}$

$C_0 = 4\,000$ ,  $t = 3\% = 0,03$  et  $n = -10$

- Si on place 3000 €, combien de temps il faudra pour avoir 4500 ?

$3000(1,03)^n = 4\,500$

$(1,03)^n = \frac{4500}{3000} = 1,5$

$n = \frac{\log 1,5}{\log 1,03} \approx 13,7 \text{ ans} = 13 \text{ ans et } 0,7 \times 12 = 8,4 \text{ mois}$

5/1

## Valeur acquise...

Avoir un capital de 1000 euros aujourd'hui et avoir 1000 euros dans 10 ans, ce n'est pas la même chose.

En effet, si l'on possède un capital  $C_0$  aujourd'hui et que l'on le place à intérêts composés au taux  $t$  pendant  $n$  périodes de capitalisation, à la fin des  $n$  périodes, on aura un capital

$$C_n = C_0(1+t)^n.$$

$C_n$  est appelée la **valeur acquise** en  $n$  périodes au taux  $t$  par le capital  $C_0$ .

### Exemple :

La valeur acquise par un capital de 1000 euros, placé au taux annuel de 3% pendant 10 ans est

$$V_{\text{acq}} = 1000 \times (1 + 0,03)^{10} = 1000 \times (1,03)^{10} \approx 1344 \text{ €}.$$

6/1

## ...et valeur actuelle

Inversement, si je veux avoir dans  $n$  périodes de capitalisation un capital de  $C_n$  et que je peux placer mon argent au taux  $t$ , il suffit qu'aujourd'hui j'aie un capital  $C_0$  tel que

$$C_0(1+t)^n = C_n, \text{ soit } C_0 = \frac{C_n}{(1+t)^n} = C_n(1+t)^{-n}.$$

$C_0$  est appelée la **valeur actuelle**, ou actualisée, de  $C_n$ .

**Exemple.** La valeur actuelle d'un capital de 1000 euros dans 10 ans, si l'on dispose d'un taux d'intérêt annuel de 3% est

$$V_{\text{act}} = 1000 \times (1,03)^{-10} \approx 744 \text{ €}.$$

7/1

## Temps et argent

Comme on vient de voir, la valeur de l'argent varie avec le temps.

Il faut donc toujours faire attention à quel moment on entre en possession d'un capital et calculer, le cas échéant, la valeur acquise à la période que nous intéresse.

**Exemple :** Un compte garantit un taux d'intérêts de 2%.

- Il y a 7 ans, on a versé 3 000 €.

La valeur acquise par ce virement est de  $3\,000 \times (1,02)^7 = 3\,446 \text{ €}$

- Il y a 5 ans on a versé 5 000 €.

La valeur acquise par ce virement est de  $5\,000 \times (1,02)^5 = 5\,520 \text{ €}$

Au total on a aujourd'hui

$$3\,000 \times (1,02)^7 + 5\,000 \times (1,02)^5 = 3446 + 5520 = 8\,966 \text{ €}$$

### Règle fondamentale

On peut ajouter ou soustraire des capitaux seulement une fois qu'on les a **actualisés** tous à la même date.

8/1

## Test

Un compte d'épargne assure un taux de 4% par an. Calculer la valeur acquise au 1er Janvier 2020 par chaque dépôt ou retrait

Date	Dépôt/retrait	Années de capitalisation	Valeur acquise au 01/01/2020
01/01/2010	4 000 €	10 ans	$4\,000(1,04)^{10} = 5921$
01/07/2010	2 000 €	9 ans + 6 mois = 9,5 ans	$2\,000(1,04)^{9.5} = 2903$
01/01/2015	-5 000 €	5 ans	$-5\,000(1,04)^5 = -6083$

Le capital total disponible le 01/01/2020 est :

$$5921 + 2903 - 6083 = 2741 \text{ €}$$

On peut actualiser aussi les retraits (i.e. les capitaux négatifs) avec la même formule.

## Section 2

## Emprunts

## Emprunt avec un seul solde

**Exemple :** Un entrepreneur souscrit un prêt à une banque avec un taux d'intérêt annuel de 5%.

Il reçoit un capital aujourd'hui et s'engage à le rendre avec un seul versement dans 3 ans.

- S'il reçoit 10 000 aujourd'hui, dans 3 ans il devra rendre  $10\,000(1,05)^3 = 11\,576 \text{ €}$
- S'il est prêt à rendre 10 000 dans 3 ans, aujourd'hui il peut recevoir  $10\,000(1,05)^{-3} = 8\,638 \text{ €}$

## Emprunt annuité : exemple

**Exemple :** Un entrepreneur souscrit un prêt à une banque avec un taux d'intérêt de 5%.

Il s'engage à payer à la fin de chaque année une annuité de 5 000 pendant 4 ans.

- Grâce à l'annuité payée après 1 an, il reçoit  $5\,000(1,05)^{-1} = 4\,762 \text{ €}$
- Grâce à l'annuité payée après 2 ans, il reçoit  $5\,000(1,05)^{-2} = 4\,535 \text{ €}$
- Grâce à l'annuité payée après 3 ans, il reçoit  $5\,000(1,05)^{-3} = 4\,319 \text{ €}$
- Grâce à l'annuité payée après 4 ans, il reçoit  $5\,000(1,05)^{-4} = 4\,114 \text{ €}$

Donc au total le prêt qu'il obtient est :

$$C = 5\,000(1,05)^{-1} + 5\,000(1,05)^{-2} + 5\,000(1,05)^{-3} + 5\,000(1,05)^{-4} = 17\,730 \text{ €}$$

## Emprunt annuité : Formule

Si on rembourse un prêt par des versement d'un montant  $p$  pour  $n$  périodes avec un taux d'intérêt  $t$ , le capital emprunté sera  $C = p(1+t)^{-1} + p(1+t)^{-2} + \dots + p(1+t)^{-n}$  et à l'aide d'un peu d'arithmétique on arrive à la formule

### Formule emprunt

$$C = p \left( \frac{1 - (1+t)^{-n}}{t} \right)$$

où  $C$  est le capital emprunté et

- Si le prêt est remboursé avec des virements **annuels** :  
 $p$ =**annuité**,  $n$ =nombre d'**années** de remboursement,  $t$ =taux **annuel**.
- Si le prêt est remboursé avec des virements **mensuels** :  
 $p$ =**mensualité**,  $n$ =nombre de **mois**,  $t$ =taux **mensuel**.

**Exemple** :  $p = 5\,000$ ,  $n = 4$ ,  $t = 0,05$  donnent

$$C = 5\,000 \left( \frac{1 - (1+0,05)^{-4}}{0,05} \right) = 17\,730$$

13/1

## Test

$$C = p \left( \frac{1 - (1+t)^{-n}}{t} \right)$$

On souscrit un prêt à la consommation avec un taux mensuel de 0,4% sur une durée de 3 ans.

On peut payer des mensualités de 300 €. Quel sera le capital emprunté ?

Le capital emprunté sera de  €

$C = ?$ ,  $p = 300$ ,  $t = 0,004$  et  $n = 3 \times 12 = 36$  **mois**

$$C = 300 \left( \frac{1 - (1+0,004)^{-36}}{0,004} \right) = 10\,040 \text{ €}$$

14/1

## Test

$$C = p \left( \frac{1 - (1+t)^{-n}}{t} \right)$$

On souscrit un prêt à la consommation avec un taux mensuel de 0,4% sur une durée de 3 ans

On veut emprunter 15 000 €. À combien les mensualités se porteront-elles ?

Les mensualités seront de  €

$C = 15\,000$ ,  $p = ?$ ,  $t = 0,004$  et  $n = 3 \times 12 = 36$  **mois**

$$15\,000 = p \left( \frac{1 - (1+0,004)^{-36}}{0,004} \right)$$

$$15\,000 = p \times 33,47 \text{ donc } p = \frac{15\,000}{33,47} = 448,22 \text{ €}$$

15/1

## Test

$$C = p \left( \frac{1 - (1+t)^{-n}}{t} \right)$$

On souscrit un prêt à la consommation avec un taux mensuel de 0,4%.

On veut emprunter 15 000 € avec des mensualités de 300 €. Quel sera la durée du prêt ?

Le prêt durera

$C = 15\,000$ ,  $p = 300$ ,  $t = 0,004$  et  $n = ?$  **mois**

$$15\,000 = 300 \left( \frac{1 - (1+0,004)^{-n}}{0,004} \right)$$

$$0,2 = 1 - 1,004^{-n}$$

$$n = -\frac{\log(0,8)}{\log(1,004)} = 56 \text{ mois} = 4 \text{ ans et } 8 \text{ mois}$$

16/1