Chapitre 1. Puissances, Logarithmes et Évolution à taux constant

Mathématiques et statistiques appliquées
Département TC1-IUT de Sceaux

Damien THOMINE

Objectifs

- Manipuler les modèles d'**évolution à taux constant**.
- Utiliser la fonction puissance pour calculer ou convertir des taux de croissance.
- Utiliser la fonction logarithme pour calculer des durées.

Plan du cours

Section 1

Révision des puissances

Puissances d'un nombre

- Si n est un nombre entier ($n \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, ...\}$) et b un nombre réel, b **à la puissance** n est le nombre

$$b^n := \underbrace{b \times b \times ... \times b}_{\text{n fois}}$$

  Exemples : $2^4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$;
  $(-3)^3 = (-3) \times (-3) \times (-3) = -27$; $(1,5)^2 = 2,25$.
- Si $b > 0$ on peut définir b^x pour tout nombre réel x, et le calculer à l'aide d'une calculatrice.
  Exemple : $2^{3,5} \approx 11,31$; $4,3^{1/2} \approx 2,07$; $3,5^{-1,8} \approx 0,10$.

Exemples : Si $b > 0$, alors $b^{0.5} = \sqrt{b}$.
Remarque : Si $b \leq 0$, la puissance b^x n'est pas définie pour tout les x.
Exemples : $(-2)^{0,5}$ =ERREUR ; 0^{-2} =ERREUR.

Test : utiliser la calculette

La touche qui permet de calculer les puissances sur une calculette est : $\boxed{\wedge}$ ou $\boxed{x^{\square}}$ ou $\boxed{x^y}$

Calculer à l'aide d'une calculette :

- $2^{7,2} \cong \boxed{}$
- $(-3)^4 \cong \boxed{}$
- $1,5^{1/3} \cong \boxed{}$
- $(-3)^{0,25} \cong \boxed{}$

Propriétés fondamentales des puissances

Si $a > 0$ et $b > 0$:

- $a^x \times b^x = (a \times b)^x$
  Exemples :
  $a^3 \times b^3 = \underbrace{a \times a \times a}_{a^3} \times \underbrace{b \times b \times b}_{b^3} = (a \times b) \times (a \times b) \times (a \times b) = (a \times b)^3$
  $7^2 \times 3^2 = (7 \times 3)^2 = 21^2$
- $b^x \times b^y = b^{x+y}$
  Exemples : $b^3 \times b^2 = \underbrace{b \times b \times b}_{b^3} \times \underbrace{b \times b}_{b^2} = b^{3+2} = b^5$
  $3^{1,5} \times 3^4 = 3^{1,5+4} = 3^{5,5}$
- $(b^x)^y = b^{xy}$
  Exemples : $(b^2)^3 = b^2 \times b^2 \times b^2 = \underbrace{b \times b}_{b^2} \times \underbrace{b \times b}_{b^2} \times \underbrace{b \times b}_{b^2} = b^{2\times 3} = b^6$
  $(3^4)^{\frac{1}{2}} = 3^{4\times\frac{1}{2}} = 3^2$

Test

Simplifier les expressions suivantes :

- $(2x)^2 = \boxed{}$
- $x^4x^{-3} = \boxed{}$
- $x^4x = \boxed{}$
- $(x^7)^3 = \boxed{}$
- $(x^7)^{1/7} = \boxed{}$
- $(y^3)^4y^{-2} = \boxed{}$

Autres propriétés des puissances

Si $b > 0$:

- $b^0 = 1$
  Pourquoi ? $b^0 \times b^2 = b^{0+2} = b^2$ donc $b^0 = \frac{b^2}{b^2} = 1$
- $b^{-x} = \frac{1}{b^x}$.
  Pourquoi ? $b^x \times b^{-x} = b^{x-x} = b^0 = 1$
  Exemple : $3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$.
- $\frac{b^x}{b^y} = b^{x-y}$.
  Pourquoi ? $\frac{b^x}{b^y} = b^x\frac{1}{b^y} = b^xb^{-y} = b^{x-y}$
  Exemple : $\frac{3^9}{3^7} = 3^{9-7} = 3^2$.

Test

Simplifier les expressions suivantes :

- $\frac{a^7}{a^5} = \boxed{}$
- $\frac{y}{y^4} = \boxed{}$
- $y^2\frac{y^5}{y^4} = \boxed{}$
- $(2y^2)^5 y^{-10} = \boxed{}$

Attention à l'addition !

Les puissances se comportent bien avec les produits, pas avec les sommes !

- $(2+3)^2 = \boxed{}$
- $2^2 + 3^2 = \boxed{}$
- $2^2 + 2^3 = \boxed{}$
- $2^{2+3} = \boxed{}$

Section 2

Évolution à taux constant

Taux d'évolution

Taux et coefficient multiplicateur

On se fixe une période. Une grandeur vaut y_0 au début de cette période et y_1 à la fin.
On dit qu'une grandeur évolue avec un **taux** t si

$$y_1 = (1+t)y_0.$$

On appelle **coefficient multiplicateur** la grandeur $k = 1 + t$.

début		fin époque 1
y_0	$\xrightarrow{1+t}$	$y_1 = y_0(1+t)$

Exemple : Le chiffre d'affaire d'une entreprise a augmenté de 30% au cours d'une année

début		fin de l'année
200 K€	$\xrightarrow{1+30\%=1,3}$	$260 = 200 \times 1,3$ K€

Évolutions successives

Exemple : Le chiffre d'affaire d'une entreprise a augmenté de 40% une année et baissé de 30% l'année suivante.

$$200 \text{ K€} \xrightarrow{1+0,4} 280 = 200 \times 1,4 \xrightarrow{1-0,3} 196 = 280 \times 0,7$$
$$200 \text{ K€} \xrightarrow[1,4\times 0,7=0,98]{} 196 = 200 \times 0,98$$

Évolution **globale sur les 2 années :**
La **coefficient multiplicateur** $= (1+0,4)(1-0,3) = 0,98$.
Le **taux** $= 0,98 - 1 = -0,02 = -2\% \neq 40\% - 30\% = 10\%$

Si une grandeur évolue avec un taux t_1 dans la 1ère période et d'un taux t_2 pendant la 2ème période, le coefficient multiplicateur entre le début et la fin de la 2ème période est $(1+t_1)(1+t_2)$.
Le taux global est $(1+t_1)(1+t_2) - 1 \neq t_1 + t_2$.

$$y_0 \xrightarrow{1+t_1} y_1 = y_0(1+t_1) \xrightarrow{1+t_2} y_2 = y_1(1+t_2)$$
$$y_0 \xrightarrow[(1+t_1)(1+t_2)]{} y_2 = y_0(1+t_1)(1+t_2)$$

Évolution à taux constant

Exemple :
Le chiffre d'affaire d'une entreprise a augmenté de 20% par an pendant 3 ans.

début :	200K€
fin 1ère année :	$200 \times 1,2 = 240$
fin 2ème année :	$200 \times 1,2 \times 1,2 = 200 \times (1,2)^2 = 288$
fin 3ème année :	$200 \times (1,2)^2 \times 1,2 = 200 \times (1,2)^3 = 345,6$

Si une grandeur a pour valeur initiale y_0 et évolue à un taux constant t chaque période, alors sa valeur après n périodes est

$$y_n = y_0(1+t)^n.$$

Le **coefficient multiplicateur global** est $(1+t)^n$ et le **taux global** $(1+t)^n - 1$.

Attention aux unités !

Lorsque vous travaillez avec une évolution à taux constant

$$y_n = y_0(1+t)^n,$$

prenez garde à l'unité de temps utilisée !

Si t est un taux	**mensuel**,	n doit être en	**mois**.
	annuel,		**années**.
	semestriel,		**semestres**.
	hebdomadaire,		**semaines**...

Exemple : 15 jours $= 0,5$ mois.

La formule $y_n = y_0(1+t)^n$ est valable aussi pour des valeurs de n non entières.

Test

Le nombre d'inscrits à un site internet augmente de 30% par mois.
Aujourd'hui, il y a 5 000 inscrits.
Combien y aura-t-il d'inscrits :

- dans 10 mois :
- dans 2 ans :
- dans 15 jours :

Remonter le temps

Exemple :
Le nombre d'inscrits à un site internet augmente de 30% par mois.
Aujourd'hui, il y a 5 000 inscrits.
Combien d'inscrits il y avait il y a 4 mois ?

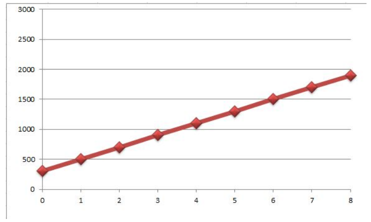
$y =$ nombre d'inscrits il y a 4 mois
$y(1,3)^4 = 5\ 000$
$y = 5\ 000 \times \frac{1}{(1,3)^4} = 5\ 000 \times 1,3^{-4} = 1\ 751$

La formule $y_n = y_0(1+t)^n$ est valable aussi pour n négatifs (correspondant à des temps passés).

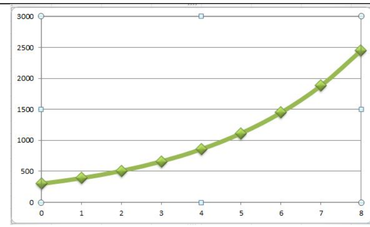
$$y_{-m} = y_0(1+t)^{-m} = \text{valeur } m \text{ périodes avant } y_0.$$

Graphiques : Évolution à incréments constants vs évolution à taux constant

Augmentation de 100€ par période
$y_n = 300 + 100n$
La courbe est une droite

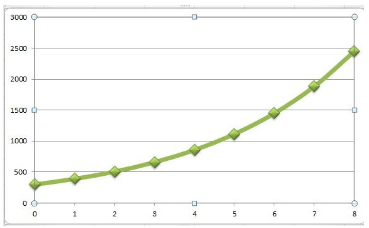


Augmentation de 30% par période
$y_n = 300(1,3)^n$
La courbe est "exponentielle"

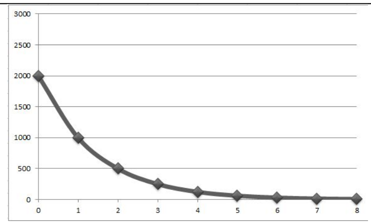


Graphiques : Taux positif et taux négatif

Augmentation de 30% par période
$t = +30\% > 0$
$y_n = 300(1,3)^n$
La courbe croît



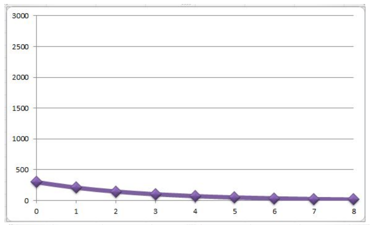
Diminution de 50% par période
$t = -50\% < 0$
$y_n = 2000(0,5)^n$
La courbe décroît

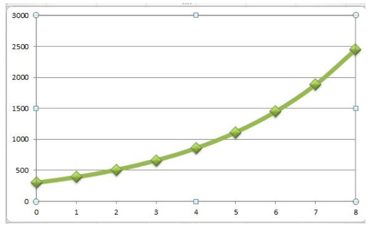


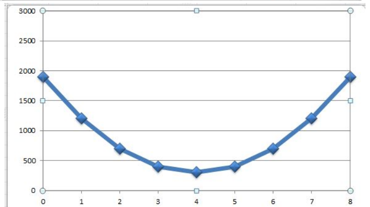
Test

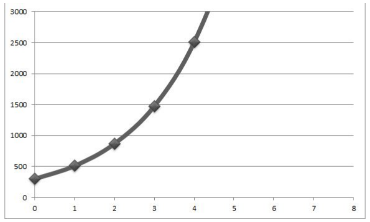
Le graphique ☐ ne peut pas représenter une évolution à taux constant.

Le taux est positif pour ☐
☐ a le taux de croissance le plus grand.


1.


2.

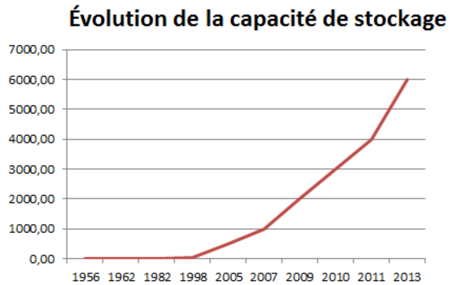

3.


4.

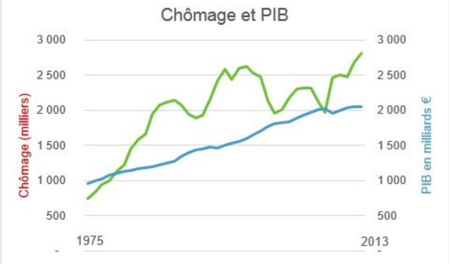
Dans la vie réelle 1

Selon vous, les phénomènes suivants peuvent-ils être approchés par un modèle d'évolution à taux constant ?

Évolution de la mémoire de stockage des disques durs (Wikipedia)



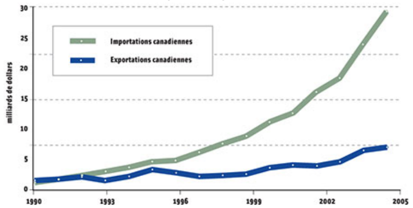
Évolution du chômage et du PIB en France (le Monde)



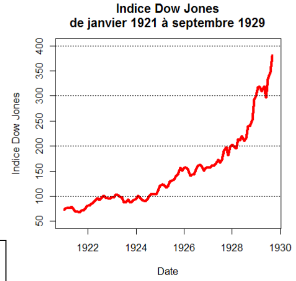
Dans la vie réelle 2

Selon vous, les phénomènes suivants peuvent-ils être approchés par un modèle d'évolution à taux constant ?

Importation (vert) et exportations (bleu) canadiennes



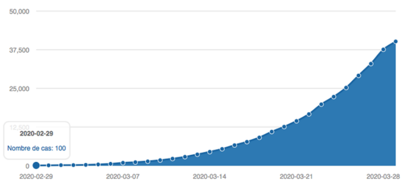
Indice Dow Jones de 1921 à 1929



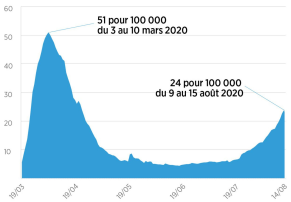
Dans la vie réelle 3

Selon vous, le phénomène suivant peut-il être approché par un modèle d'évolution à taux constant ?

Nombre de cas de COVID-19 en France en mars 2020



Nombre de cas de COVID-19 en France de mars à août 2020



Section 3

Trouver le taux : équation $x^m = b$

Trouver le taux : équation $x^m = b$

Exemple. Le nombre d'inscrits d'un site internet était $y_0 = 5\ 500$ en 2010 et $y_7 = 12\ 158$ en 2017
Quel est le taux (moyen) de croissance <u>annuel</u> ?

t=taux annuel
On suppose une évolution à taux constant : $y_0(1+t)^n = y_n$. On connaît y_0 et y_7, et on cherche t.
$5\ 500(1+t)^7 = 12\ 158 \quad \Leftrightarrow \quad (1+t)^7 = \frac{12\ 158}{5\ 500} \cong 2,21$
Si $k = 1+t$ est le coefficient multiplicateur annuel :
$k^7 = 2,21 \quad \Leftrightarrow \quad (k^7)^{\frac{1}{7}} = 2,21^{\frac{1}{7}}$
$k^{7\frac{1}{7}} = 2,21^{\frac{1}{7}} \quad \Leftrightarrow \quad k^1 = 2,21^{\frac{1}{7}}$
$k = 2,21^{\frac{1}{7}} \cong 1,12$
$1+t = 1,12$ donc le taux de croissance annuel est de $t = 0,12 = 12\%$.

Equation $x^m = b$

Si $x^m = b$ alors $x = b^{1/m}$.

Test

Résoudre les équations :

- $x^{10} = 5$
- $x^{-10} = 5$
- $x^{1,5} = 5$
- $(a-3)^{1,5} = 5$

La population d'une ville a doublé ces 20 dernières années.
Quel est son taux moyen de croissance annuel ?

Taux équivalents

En pratique, on peut rencontrer diverses périodes de référence, et donc des taux hebdomadaires, mensuels, trimestriels, annuels... Comment faire pour convertir de tels taux ?
Exemple. Le chiffre d'affaire d'une entreprise augmente de 5% par **mois**. Quel est le taux de croissance **annuel** ?
Le taux mensuel est $t_m = 5\% = 0,05$. On cherche le taux annuel t_a.
Au bout d'un an, le coefficient multiplicateur est de $(1+t_m)^{12} = (1+t_a)$:

$$\begin{array}{ccccccc} y_0 & \xrightarrow[1+t_m]{} & y_0(1+t_m) & \xrightarrow[1+t_m]{} & \dots & \xrightarrow[1+t_m]{} & y_0(1+t_m)^{12} \\ y_0 & & & \xrightarrow[1+t_a]{\hspace{6em}} & & & y_0(1+t_a) \end{array}$$

Donc $1+t_a = (1+0,05)^{12} \cong 1,80$
$t_a \cong 1,80 - 1 = 0,80 = 80\% \qquad \neq 5\% \times 12 = 60\%$
On aurait aussi pu trouver le taux mensuel à partir du taux annuel :
$1+t_m = (1+t_a)^{\frac{1}{12}}$.

Taux équivalents

Cette conversion fonctionne pour d'autres périodes de référence. Par exemple, 1 trimestre égale 3 mois, donc

$$(1+t_t) = (1+t_m)^3,$$

où t_t est le taux trimestriel et t_m le taux mensuel.

Taux équivalents

Deux taux sur des périodes des longueurs différentes sont équivalents s'ils décrivent la même évolution.
En particulier un taux mensuel t_m est équivalent à un taux annuel t_a si

$$1+t_a = (1+t_m)^{12}.$$

Le taux annuel n'est pas égal à 12 fois le taux mensuel ; en général, $t_a \neq 12t_m$. Si une méthode aussi simple fonctionnait, croyez bien qu'elle serait enseignée à la place !

Test

Calculer :

- le taux annuel t_a équivalent d'un taux mensuel de -5%
- le taux mensuel t_m équivalent d'un taux annuel de 60%

Section 4

Trouver la durée : équation $b^x = a$

Trouver la durée

Exemple : Le nombre d'inscrits à un site croît de 30% par an.
Dans combien de temps le nombre d'inscrits aura-t-il doublé ?

Soit y_n le nombre d'inscrits après n années. On a une évolution à taux constant :

$$y_n = y_0(1+t)^n = y_0 \times 1,3^n$$

Le coefficient multiplicateur après n années vaut $1,3^n$. On cherche n tel que ce coefficient multiplicateur vaille 2 :
$1,3^n = 2$
Comment résoudre cette équation ?

Logarithme décimal

Le **logarithme** (décimal) de x est le nombre a que $10^a = x$.
On note $a = \log(x)$. Il est bien défini si $x > 0$.

Exemples : $\log(100) = 2$ car $10^2 = 100$.
$\log(0,01) = -2$ car $10^{-2} = 0,01$.
$\log(2) = 0,301\ldots$ car $10^{0,301\ldots} = 2$.
Autrement dit : $10^{\log(x)} = x$.

Propriétés du logarithme

- $\log(1) = 0$,
- $\log(10) = 1$.

En effet, $10^{\log(1)} = 1 = 10^0$ donc $\log(1) = 0$, et $10^{\log(10)} = 10 = 10^1$ donc $\log(10) = 1$.

$\log(xy) = \log(x) + \log(y)$ pour x, $y > 0$.

En effet, $10^{\log(xy)} = xy = 10^{\log(x)} 10^{\log(y)} = 10^{\log(x)+\log(y)}$.

$\log(x^y) = y \log(x)$ pour x, $y > 0$.

En effet, $10^{\log(x^y)} = x^y = (10^{\log(x)})^y = 10^{y \log(x)}$.

Test

Calculer sans calculatrice :

- $\log(10\ 000) = \boxed{}$
- $\log(0,001) = \boxed{}$

Encadrer entre deux valeurs entières :

- $\boxed{} < \log(579) < \boxed{}$
- $\boxed{} < \log(579\ 000) < \boxed{}$

Logarithme et calculatrice

La plupart des calculatrice permettent de calculer d'autres logarithmes

- le logarithme en 10, noté souvent log
- le logarithme néperien, c'est-à-dire le logarithme dont la base est le nombre de Néper $\mathrm{e} = 2,718\ldots$, noté ln.

Vérifiez quels logarithmes calcule votre calculette :

- Logarithme en base 10 :
  $\log(10) = 1$
- Logarithme en base e :
  $\ln(10) = 2,30258\ldots$

Enfin, d'autres calculatrices permettent de calculer des logarithmes en toute base (touche $\log_a b$). Nous n'utiliserons pas cette notion.

Equation $b^x = a$

Exemple : Résoudre avec le logarithme :
$1,3^x = 2$
$\log(1,3^x) = \log(2)$
$x \log(1,3) = \log(2)$
$x = \frac{\log(2)}{\log(1,3)} \simeq \frac{0,6931}{0,2624} \simeq 2,64$

Equation $b^x = a$

Soient a et $b > 0$. Si $b^x = a$, alors

$$x = \frac{\log(a)}{\log(b)}.$$

Trouver la durée, bis

Exemple : Le nombre d'inscrits à un site croît de 30% par an.
Dans combien de temps le nombre d'inscrits aura-t-il doublé ?

Soit y_n le nombre d'inscrits après n années. On a une évolution à taux constant :

$$y_n = y_0(1+t)^n = y_0 \times 1,3^n$$

Le coefficient multiplicateur après n années vaut $1,3^n$. On cherche n tel que ce coefficient multiplicateur vaille 2 :
$1,3^n = 2$
On a $n = \frac{\log(2)}{\log(1,3)} \simeq 2,64$. Le nombre d'inscrit aura doublé dans $2,64$ ans, soit 2 ans et $12 \times 0,64 = 8$ mois.

Test

Parfois, on peut rencontrer des équations plus compliquées que $b^x = a$.
Dans ce cas, on peut essayer de se ramener à cette forme.
Résoudre les équations suivantes :

- $1,34^x = 2,56$
- $2 \times 1,34^y = 5,12$
- La valeur d'une machine diminue de 20% par an. Dans combien de temps sa valeur sera réduite à la moitié ?