Chapitre 2. Éléments de mathématiques financières

Mathématiques et statistiques appliquées
Département TC1-IUT de Sceaux

Damien THOMINE

Objectifs

- Appliquer le modèle d'évolution à taux constant aux outils financiers : intérêts composés et actualisation.
- Savoir calculer les mensualités ou annuités d'un emprunt.

Plan du cours

Section 1

Intérêts Composés

Intérêts Composés

Exemple. Je mets 1000€ sur un livret A qui rémunère à hauteur de 1% par an. Si je ne fais rien, combien aurai-je d'argent au bout d'un an ? De 2 ans ? De 10 ans ?

$C_0 = 1000€$
$C_1 = 1000 + 1000 \times 0,01 = 1000 \times 1,01 = 1010€$
$C_2 = C_1 + C_1 \times 0,01 = C_1 \times 1,01 = 1000 \times 1,01^2 \approx 1020,10€$
...
...
$C_{10} = 1000 \times 1,01^{10} \approx 1104,62€$.

Un capital placé à **intérêts composés** à un taux fixé t suit une évolution à taux constant.
Si l'on possède un capital C_0 aujourd'hui et que l'on le place à intérêts composés au taux t, alors au bout de n périodes de capitalisation, on dispose d'un capital de

$$C_n = C_0(1+t)^n.$$

Test

Un compte d'épargne garantit un taux d'intérêt de 3% par an

- On place 4000 €aujourd'hui.
  Dans 7 ans on aura $\boxed{4\ 000 \times 1,03^7 = 4919}$
  $C_0 = 4\ 000$, $t = 3\% = 0,03$ et $n = 7$
- Il y a 10 ans, on avait placé un certain capital qui est arrivé aujourd'hui à 4000 €.
  On avait placé $\boxed{4\ 000 \times 1,03^{-10} = 2976€}$
  $C_0 = 4\ 000$, $t = 3\% = 0,03$ et $n = -10$
- Si on place 3000 €, combien de temps il faudra pour avoir 4500 ?
  $3000(1,03)^n = 4\ 500$
  $(1,03)^n = \frac{4500}{3000} = 1,5$
  $n = \frac{\log 1{,}5}{\log 1{,}03} \cong 13,7$ ans$=$ 13 ans et $0,7 \times 12 = 8,4$ mois

Valeur acquise...

Avoir un capital de 1 000 euros aujourd'hui et avoir 1 000 euros dans 10 ans, ce n'est pas la même chose.

En effet, si l'on possède un capital C_0 aujourd'hui et que l'on le place à intérêts composés au taux t pendant n périodes de capitalisation, à la fin des n périodes, on aura un capital

$$C_n = C_0(1+t)^n.$$

C_n est appelée la **valeur acquise** en n périodes au taux t par le capital C_0.

Exemple :
La valeur acquise par un capital de 1 000 euros, placé au taux annuel de 3% pendant 10 ans est

$$V_{\text{acq}} = 1\,000 \times (1+0,03)^{10} = 1\,000 \times (1,03)^{10} \approx 1344 \text{ €}.$$

...et valeur actuelle

Inversement, si je veux avoir dans n périodes de capitalisation un capital de C_n et que je peux placer mon argent au taux t, il suffit qu'aujourd'hui j'aie un capital C_0 tel que

$$C_0(1+t)^n = C_n, \quad \text{soit} \quad C_0 = \frac{C_n}{(1+t)^n} = C_n(1+t)^{-n}.$$

C_0 est appelée la **valeur actuelle**, ou actualisée, de C_n.

Exemple. La valeur actuelle d'un capital de 1 000 euros dans 10 ans, si l'on dispose d'un taux d'intérêt annuel de 3% est

$$V_{act} = 1\,000 \times (1,03)^{-10} \approx 744 \text{ €}.$$

Temps et argent

Comme on vient de voir, la valeur de l'argent varie avec le temps.
Il faut donc toujours faire attention à quel moment on entre en possession d'un capital et calculer, le cas échéant, la valeur acquise à la période que nous intéresse.

Exemple : Un compte garantit un taux d'intérêts de 2%.

- Il y a 7 ans, on a versé 3 000 €.
  La valeur acquise par ce virement est de $3\ 000 \times (1,02)^7 = 3\ 446$ €
- Il y a 5 ans on a versé 5 000 €.
  La valeur acquise par ce virement est de $5\ 000 \times (1,02)^5 = 5\ 520$ €

Au total on a aujourd'hui
$3\ 000 \times (1,02)^7 + 5\ 000 \times (1,02)^5 = 3446 + 5520 = 8\ 966$ €

Règle fondamentale

On peut ajouter ou soustraire des capitaux seulement une fois qu'on les a **actualisés** tous à la même date.

Test

Un compte d'épargne assure un taux de 4% par an. Calculer la valeur acquise au 1er Janvier 2020 par chaque dépôt ou retrait

Date	Dépôt/retrait	Années de capitalisation	Valeur acquise au 01/01/2020
01/01/2010	4 000 €	10 ans	$4\,000(1,04)^{10} = 5921$
01/07/2010	2 000 €	9 ans + 6 mois = 9,5 ans	$2\,000(1,04)^{9.5} = 2903$
01/01/2015	-5 000 €	5 ans	$-5\,000(1,04)^{5} = -6083$

Le capital total disponible le 01/01/2020 est :

$\boxed{5921 + 2903 - 6083 = 2741}$ €

On peut actualiser aussi les retraits (i.e. les capitaux négatifs) avec la même formule.

Section 2

Emprunts

Emprunt avec un seul solde

Exemple : Un entrepreneur souscrit un prêt à une banque avec un taux d'intérêt annuel de 5%.
Il reçoit un capital aujourd'hui et s'engage à le rendre avec un seul versement dans 3 ans.

- S'il reçoit 10 000 aujourd'hui,
  dans 3 ans il devra rendre $10\ 000(1,05)^3 = 11\ 576$ €
- S'il est prêt à rendre 10 000 dans 3 ans,
  aujourd'hui il peut recevoir $10\ 000(1,05)^{-3} = 8\ 638$ €

Emprunt annuité : exemple

Exemple : Un entrepreneur souscrit un prêt à une banque avec un taux d'intérêt de 5%.
Il s'engage à payer à la fin de chaque année une annuité de 5 000 pendant 4 ans.

- Grâce à l'annuité payée après 1 an, il reçoit $5\,000(1,05)^{-1} = 4\,762$ €
- Grâce à l'annuité payée après 2 ans, il reçoit $5\,000(1,05)^{-2} = 4\,535$ €
- Grâce à l'annuité payée après 3 ans, il reçoit $5\,000(1,05)^{-3} = 4\,319$ €
- Grâce à l'annuité payée après 4 ans, il reçoit $5\,000(1,05)^{-4} = 4\,114$ €

Donc au total le prêt qu'il obtient est :
$C = 5\,000(1,05)^{-1} + 5\,000(1,05)^{-2} + 5\,000(1,05)^{-3} + 5\,000(1,05)^{-4} = 17\,730$ €

Emprunt annuité : Formule

Si on rembourse un prêt par des versement d'un montant p pour n périodes avec un taux d'intérêt t, le capital emprunté sera $C = p(1+t)^{-1} + p(1+t)^{-2} + \cdots + p(1+t)^{-n}$ et à l'aide d'un peu d'arithmétique on arrive à la formule

Formule emprunt

$$C = p\left(\frac{1-(1+t)^{-n}}{t}\right)$$

où C est le capital emprunté et

- Si le prêt est remboursé avec des virements **annuels** : p=**annuité**, n=nombre d'**années** de remboursement, t=taux **annuel**.
- Si le prêt est remboursé avec des virements **mensuels** : p=**mensualité**, n=nombre de **mois**, t=taux **mensuel**.

Exemple : $p = 5\,000$, $n = 4$, $t = 0,05$ donnent $C = 5\,000\left(\frac{1-(1+0{,}05)^{-4}}{0{,}05}\right) = 17\,730$

Test

$$C = p\left(\frac{1-(1+t)^{-n}}{t}\right)$$

On souscrit un prêt à la consommation avec un taux mensuel de $0,4\%$ sur une durée de 3 ans.

On peut payer des mensualités de 300 €. Quel sera le capital emprunté ?

Le capital emprunté sera de $\boxed{10\,040}$ €

$C =?$, $p = 300$, $t = 0,004$ et $n = 3 \times 12 = 36$ **mois**

$C = 300\left(\frac{1-(1+0{,}004)^{-36}}{0{,}004}\right) = 10\,040$ €

Test

$$C = p\left(\frac{1-(1+t)^{-n}}{t}\right)$$

On souscrit un prêt à la consommation avec un taux mensuel de $0,4\%$ sur une durée de 3 ans

On veut emprunter 15 000 €. À combien les mensualités se porteront-elles ?

Les mensualités seront de $\boxed{448,22}$ €

$C = 15\,000$, $p = ?$, $t = 0,004$ et $n = 3 \times 12 = 36$ **mois**

$15\,000 = p\left(\frac{1-(1+0,004)^{-36}}{0,004}\right)$

$15\,000 = p \times 33,47$ donc $p = \frac{15\,000}{33,47} = 448,22$ €

Test

$$C = p\left(\frac{1-(1+t)^{-n}}{t}\right)$$

On souscrit un prêt à la consommation avec un taux mensuel de $0,4\%$. On veut emprunter 15 000 € avec des mensualités de 300 €. Quel sera la durée du prêt ?

Le prêt durera $\boxed{\text{4 ans et 8 mois}}$

$C = 15\,000,\ p = 300,\ t = 0,004$ et $n =?$ **mois**

$15\,000 = 300\left(\frac{1-(1+0{,}004)^{-n}}{0{,}004}\right)$

$0,2 = 1 - 1,004^{-n}$

$n = -\frac{\log(0{,}8)}{\log(1{,}004)} = 56$ mois $=$ 4 ans et 8 mois