Feuille d'exercices n°1

Exercice 1. On considère un triangle ABC rectangle en A tel que $BC = 5,5$ cm et $AC = 2,2$ cm.
1. Calculer AB à l'aide du théorème de Pythagore (donner la formule de la valeur exacte, puis donner une valeur approchée à l'aide d'une calculatrice).
2. Calculer $\sin(\widehat{B})$.
3. À l'aide d'une calculatrice, donner la valeur approchée de l'angle $\widehat{B}$ (en degrés ou en radians).

Exercice 2. On considère un triangle ABC rectangle en A tel que $AC = 8$ cm et $\widehat{B} = 50$ degrés.
1. Donner les valeurs des angles $\widehat{A}$ et $\widehat{C}$.
2. Calculer les longueurs AB et BC.

Exercice 3.
1. Dans chacun des cas suivants, dire si les deux réels correspondent au même point sur le cercle trigonométrique, et dessiner les points sur le cercle :

$$\text{a) } \frac{\pi}{2} \text{ et } \frac{9\pi}{2}, \qquad \text{b) } -\frac{\pi}{6} \text{ et } \frac{17\pi}{6}, \qquad \text{c) } \frac{\pi}{3} \text{ et } -\frac{5\pi}{3}.$$

2. Donner tous les réels x correspondant au même point du cercle trigonométrique que le réel $\frac{\pi}{3}$.

Exercice 4.
1. En utilisant les symétries sur le cercle trigonométrique, donner le cosinus et le sinus des réels suivants : $-\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$. 2. Donner le cosinus et le sinus des réels suivants : $-3\pi, \frac{7\pi}{2}, -\frac{4\pi}{3}, -\frac{5\pi}{4}$.

Exercice 5. Résoudre les équations :
1. $\sin(\alpha) = \frac{1}{2}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ puis avec $\alpha \in [0, 2\pi[$;
2. $\cos(\alpha) = \frac{1}{2}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ puis avec $\alpha \in [0, 2\pi[$;
3. $\cos(\alpha) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin(\alpha) < 0$ avec $\alpha \in]-\pi, \pi]$;
4. $\sin(\alpha) = \sin(\frac{\pi}{5})$ avec $\alpha \in]-\pi, \pi]$.

Exercice 6. Soit α un réel tel que $\cos(\alpha) = -\frac{3}{5}$.
1. Calculer les deux valeurs possibles de $\sin(\alpha)$.
2. On sait que $\alpha \in [0, \pi]$. Donner alors l'unique valeur de $\sin(\alpha)$ qui convient.

Exercice 7.
1. Démontrer que, pour tout réel α, on a : $\cos^2(\alpha) = \frac{1}{2}(\cos(2\alpha) + 1)$. 2. En utilisant cette formule, calculer $\cos(\frac{\pi}{12})$. 3. En déduire $\sin(\frac{\pi}{12})$. 4. En déduire le cosinus et le sinus de $-\frac{\pi}{12}$. 5. Montrer que $\frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12}$. En déduire le cosinus et le sinus de $\frac{5\pi}{12}$.

6. *Question facultative :* De la même manière que précédemment :
a) Calculer $\cos(\frac{\pi}{8})$ en utilisant la formule de la question 1.
b) En déduire $\sin(\frac{\pi}{8})$.
c) En déduire le cosinus et le sinus de $\frac{7\pi}{8}$.

Rappels : $\cos(\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$, $\cos(\frac{\pi}{4}) = \sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$, $\sin(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
$\cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$, $\sin(a + b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$.

Exercices supplémentaires

Exercice 8. On considère un triangle ABC rectangle en A tel que $BC = 4$ et $\widehat{B} = \frac{\pi}{6}$ (angle en radians). Calculer les longueurs AB et AC.

Exercice 9. On considère un triangle ABC isocèle en A tel que $AB = AC = \ell$ avec $\ell = 6$ cm, et tel que l'angle $\widehat{BAC}$ ait une mesure en radians égale à $\frac{\pi}{4}$. Soit H le milieu du segment $[BC]$. Comme le triangle ABC est isocèle, (AH) est la hauteur issue de A, ce qui implique que le triangle BHA est rectangle en H.
1. Donner les valeurs des angles $\widehat{CBA}$ et $\widehat{BCA}$. ainsi que la valeur de l'angle $\widehat{BAH}$. 2. En déduire la longueur BH puis la longueur BC (donner des valeurs approchées). 3. En déduire que $\cos(\frac{3\pi}{8}) = \sin(\frac{\pi}{8})$.

Exercice 10. Dans chacun des cas suivants, dire si les deux réels correspondent au même point sur le cercle trigonométrique ; dessiner les points sur le cercle :

$$\text{a) } \frac{4\pi}{3} \text{ et } -\frac{2\pi}{3}, \qquad \text{b) } -\frac{\pi}{2} \text{ et } \frac{3\pi}{2}, \qquad \text{c) } -\frac{\pi}{2} \text{ et } -\frac{3\pi}{2}, \qquad \text{d) } \frac{2\pi}{3} \text{ et } \frac{7\pi}{3}.$$

Exercice 11.
1. En utilisant les symétries sur le cercle trigonométrique, donner le cosinus et le sinus des réels suivants : $\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, -\frac{\pi}{6}, -\frac{\pi}{2}$.
2. Donner le cosinus et le sinus des réels suivants : $\frac{5\pi}{3}, \frac{7\pi}{3}, \frac{9\pi}{3}, -\frac{2\pi}{3}$.

Exercice 12. Résoudre les équations suivantes (avec $\alpha \in \mathbb{R}$) :
1. $2\cos(\alpha) = 1$,
2. $\sin(3\alpha) = 0$,
3. $\sin(2\alpha) = \sin(\frac{\pi}{7})$,
4. $4\cos^2(\alpha) = 1$,
5. $(\sin(\alpha) - 1)(\cos(\alpha) - 1) = 0$.

Exercice 13. Montrer que, pour tout x réel,
1. $(\sin(x) + \cos(x))^2 = 1 + \sin(2x)$,
2. $(\sin(x) - \cos(x))^2 = 1 - \sin(2x)$.

Exercice 14.
1. Montrer que, pour tous réels a et b, on a : $\cos(a - b) - \cos(a + b) = 2\sin(a)\sin(b)$. 2. En posant $x = a + b$ et $y = a - b$, en déduire que, pour tous réels x et y,
$\cos(y) - \cos(x) = 2\sin(\frac{x+y}{2})\sin(\frac{x-y}{2})$. 3. Montrer de même que $\cos(a-b)+\cos(a+b) = 2\cos(a)\cos(b)$. En déduire une factorisation de $\cos(x) + \cos(y)$.
4. Calculer $\sin(a + b) + \sin(a - b)$ et $\sin(a + b) - \sin(a - b)$. En déduire une factorisation de $\sin(x) + \sin(y)$ et de $\sin(x) - \sin(y)$.

Exercice 15. Développer $\sin(x - \frac{\pi}{4})$. En déduire les solutions de
1. $\sin(x) - \cos(x) = 0$,
2. $\sin(x) - \cos(x) = \sqrt{2}$.

Exercice 16. Résoudre dans $[0, 2\pi[$ puis dans $] - \pi, \pi]$ l'équation suivante :

$$1 + \cos(\alpha) + \cos(2\alpha) = 0.$$

On pourra utiliser l'identité $\cos(2\alpha) = 2\cos^2(\alpha) - 1$.