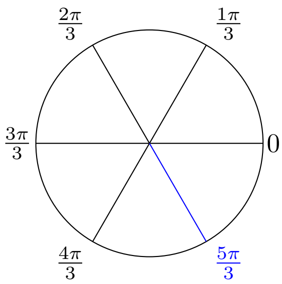
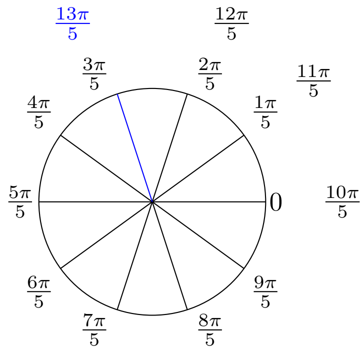
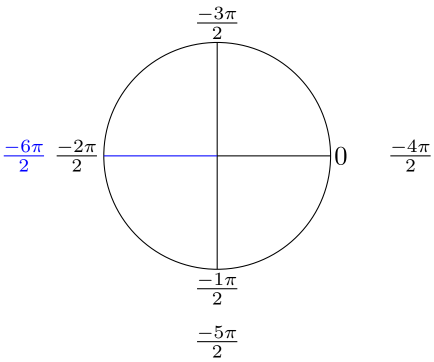
Corrigé du devoir surveillé n$^{\text{o}}$ 1 de géométrie

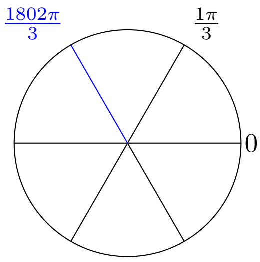
Exercice 1.

1.









Pour le quatrième exemple : une division euclidienne de 1802 par 6 donne

$$\frac{1802\pi}{3} = \frac{300 \times 6\pi + 2\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} + 300 \times 2\pi,$$

et donc $\frac{1802\pi}{3}$ est congru à $\frac{2\pi}{3}$ modulo 2π. Il reste à placer sur le cercle trigonométrique le point correspondant à $\frac{2\pi}{3}$.

2. • Vu la figure de la question 1, $\frac{5\pi}{3}$ et $-\frac{\pi}{3}$ sont représentés par le même point sur le cercle trigonométrique (on peut aussi utiliser que $\frac{5\pi}{3} = -\frac{\pi}{3} + 2\pi$). Ce point est le symétrique par rapport à l'axe horizontal du point représentant $\frac{\pi}{3}$, donc

$$\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2},$$
$$\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

• Vu la figure de la question 1, $-\frac{6\pi}{2}$ et π sont représentés par le même point sur le cercle trigonométrique (on peut aussi utiliser que $-\frac{6\pi}{2} = -3\pi = \pi - 2 \times 2\pi$), donc

$$\cos\left(-\frac{6\pi}{2}\right) = \cos(\pi) = -1,$$
$$\sin\left(-\frac{6\pi}{2}\right) = \sin(\pi) = 0.$$

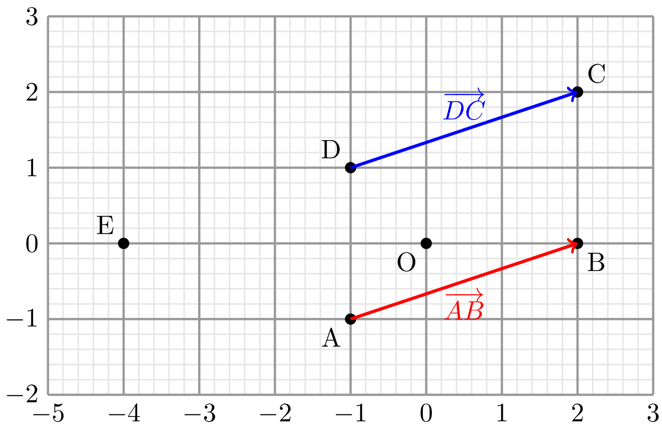
• $-\frac{3\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{4}$ sont représentés par des points diamétralement opposés (c'est-à-dire symétriques l'un de l'autre par rapport à l'origine), donc

$$\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2},$$
$$\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

• Vu la figure de la question 1, le point représentant $\frac{1802\pi}{3}$ sur le cercle trigonométrique est le même que le point représentant $\frac{2\pi}{3}$, et est le symétrique par rapport à l'axe vertical du point représentant $\frac{\pi}{3}$, donc

$$\cos\left(\frac{1802\pi}{3}\right) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2},$$
$$\sin\left(\frac{1802\pi}{3}\right) = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Exercice 2.
1.



2. Soient (x_A, y_A) les coordonnées du point A, et de même pour les points B, C et D. Alors

$$\overrightarrow{AB} : \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-(-1) \\ 0-(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix},$$
$$\overrightarrow{DC} : \begin{pmatrix} x_C - x_D \\ y_C - y_D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-(-1) \\ 2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ ont les mêmes coordonnées, donc ils sont égaux. Par un théorème du cours, le quadrilatère $ABCD$ est donc un parallélogramme [1].

3. Par le même théorème du cours, le quadrilatère $ABDE$ est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{ED}$. Soient (x_E, y_E) les coordonnées du point E recherché. Alors $ABDE$ est un parallélogramme si et seulement si

$$\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_D - x_E \\ y_D - y_E \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 - x_E \\ 1 - y_E \end{pmatrix}$$
$$\iff \begin{cases} 3 = -1 - x_E \\ 1 = 1 - y_E \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x_E = -4 \\ y_E = 0 \end{cases},$$

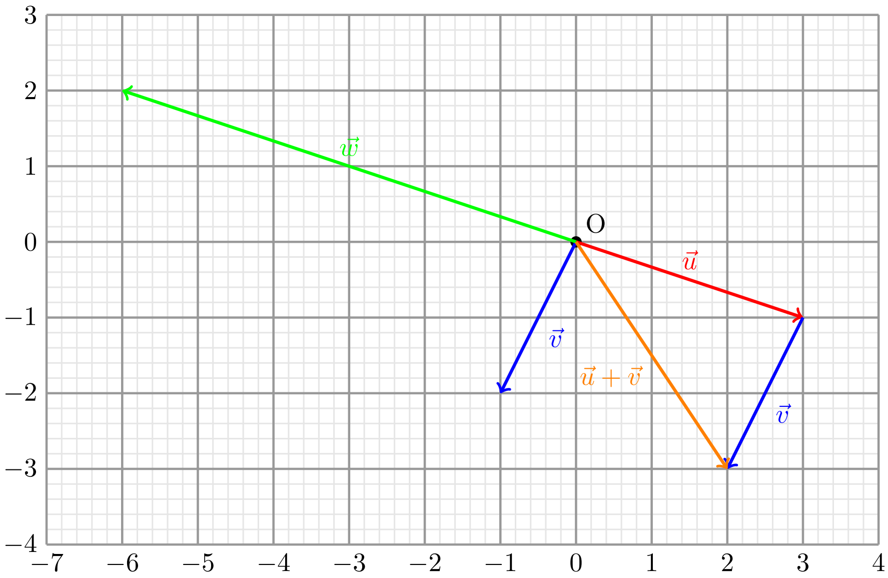
1. Éventuellement aplati.

donc le point E existe et a pour coordonnées $(-4, 0)$.

4. Les quadrilatères $ABDE$ et $ABCD$ sont des parallélogrammes, donc $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$.
Par la relation de Chasles, $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{CD}$. En particulier, les vecteurs $\overrightarrow{CE}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

On aurait aussi pu travailler en coordonnées, et trouver $\overrightarrow{CE} : \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD} : \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}$. La relation $\overrightarrow{CE} = 2\overrightarrow{CD}$ est alors immédiate.

Exercice 3.
1.



3. On calcule :

$$\vec{u} - 2\vec{w} : \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} -6 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 - 2\times(-6) \\ -1 - 2\times 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

Le vecteur $\vec{u} - 2\vec{w}$ a donc pour coordonnées $\begin{pmatrix} 15 \\ -5 \end{pmatrix}$.

4. • On observe que $\vec{w} = -2\vec{u}$. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{w}$ sont donc colinéaires.

• On observe sur la figure que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaire. Il reste à le démontrer. Raisonnons par l'absurde, et supposons-les colinéaires. Comme $\vec{u}$ est non nul, il existe alors un réel λ tel que

$$\begin{aligned}
\vec{v} &= \lambda\vec{u} \\
\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} &= \lambda\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \\
&\iff \left\{\begin{array}{lcl} -1 &=& \lambda\times 3 \\ -2 &=& \lambda\times(-1) \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{lcl} \lambda &=& -1/3 \\ \lambda &=& 2 \end{array}\right. .
\end{aligned}$$

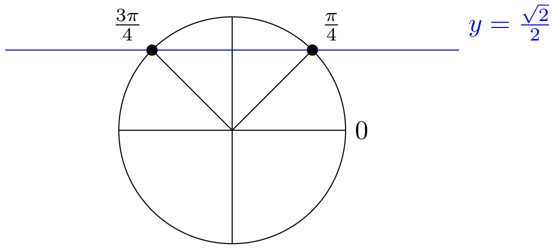
Par conséquent, $2 = \lambda = -1/3$. C'est faux. Notre hypothèse de départ était donc elle aussi fausse, c'est-à-dire que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaire.

On pouvait aussi raisonner avec le déterminant :

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 3\times(-2) - (-1)\times(-1) = -7.$$

Le déterminant de ces deux vecteurs est non nul, donc ces vecteurs ne sont pas colinéaires.

Exercice 4.
1.

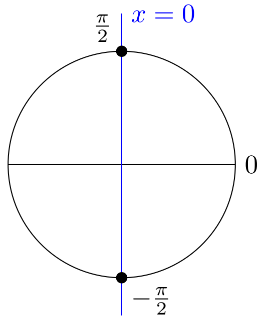


Il y a deux points du cercle trigonométrique donnant un sinus égal à $\frac{\sqrt{2}}{2}$, qui sont symétriques l'un de l'autre par rapport à l'axe vertical (figure ci-dessus). On sait que $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, donc un de ces points correspond au réel $\frac{\pi}{4}$. Le second point est le symétrique de $\frac{\pi}{4}$ par rapport à l'axe vertical, soit $\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$. Finalement, $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{3\pi}{4}$ correspondent aux deux points du cercle dont le sinus est $\frac{\sqrt{2}}{2}$.
Si un point du cercle correspond au réel x, il correspond à tous les réels $x + k \times 2\pi$. Donc les $x \in \mathbb{R}$ tels que $\sin(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ sont les $x = \frac{\pi}{4} + k \times 2\pi$ et $x = \frac{3\pi}{4} + k \times 2\pi$, pour tous les entiers $k \in \mathbb{Z}$ (il y a une infinité de solutions). Autrement dit, ce sont tous les réels congrus à $\frac{\pi}{4}$ ou $\frac{3\pi}{4}$ modulo 2π.

2. Poson $z = y + \frac{\pi}{3}$. L'équation à résoudre devient :

$$\cos(z) = 0,$$

avec la contrainte $-\pi < y \leq \pi$, soit $-\pi + \frac{\pi}{3} < y + \frac{\pi}{3} = z \leq \pi + \frac{\pi}{3}$. Autrement dit, $z \in]-\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}]$.



Il y a deux points du cercle trigonométrique donnant un cosinus égal à 0, qui sont symétriques l'un de l'autre par rapport à l'axe horizontal (figure ci-dessus). Chaque point du cercle correspond à un unique réel dans $]-\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}]$. On sait que $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$. Donc la solution correspondant au point solution du haut est le réel $\frac{\pi}{2}$ (qui appartient bien à l'intervalle $]-\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}]$). La solution correspondant au point solution du bas est le réel $-\frac{\pi}{2}$, qui appartient lui aussi à l'intervalle $]-\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}]$.
Par conséquent, les solutions z sont $\frac{\pi}{2}$ et $-\frac{\pi}{2}$. Enfin, comme $y = z - \frac{\pi}{3}$, on trouve que les solutions de l'équation initiale sont $y = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$ et $y = -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = -\frac{5\pi}{6}$.

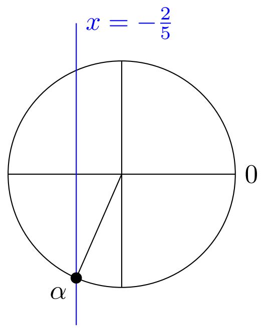
Exercice 5.
1. Le point correspondant à $\alpha \in [-\pi, -\frac{\pi}{2}]$ appartient au quadrant inférieur gauche du cercle trigonométrique, donc $\sin(\alpha) \leq 0$.

2. Par le théorème de Pythagore,

$$\begin{aligned}
\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) &= 1 \\
\sin^2(\alpha) + \left(\frac{2}{5}\right)^2 &= 1 \\
\sin^2(\alpha) &= 1 - \frac{4}{25} \\
\sin^2(\alpha) &= \frac{21}{25}.
\end{aligned}$$

Par conséquent, $\sin(\alpha) = \sqrt{\frac{21}{25}}$ ou $\sin(\alpha) = -\sqrt{\frac{21}{25}}$. Mais comme $\sin(\alpha)$ est négatif par la première question, on a $\sin(\alpha) = -\sqrt{\frac{21}{25}} = -\frac{\sqrt{21}}{5}$.

3. Sans calculatrice, il est difficile d'estimer l'angle α, ou son sinus. Le plus simple est d'utiliser le cosinus, qui vaut $-2/5$. Il y a deux points sur le cercle trigonométrique qui ont un cosinus de $-2/5$, et seul l'un d'eux est dans le quadrant inférieur gauche ; c'est le point que nous recherchons.



Exercice 6.
On pourra remarquer, avant de commencer, que $\sin^2(\beta) + \cos^2(\beta) = \frac{5}{9} + \frac{4}{9} = 1$, donc un tel angle β existe bel et bien.

1. On utilise les formule de doublement d'angle (qui se retrouvent à partir des formule d'addition en prenant $a = b$) :

$$\begin{aligned}\cos(2\beta) &= \cos^2(\beta) - \sin^2(\beta)\\ &= \left(\frac{2}{3}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2 = \frac{4}{9} - \frac{5}{9} = -\frac{1}{9},\\ \sin(2\beta) &= 2\sin(\beta)\cos(\beta)\\ &= 2 \times \frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{5}}{3} = \frac{4\sqrt{5}}{9}.\end{aligned}$$

2. Toujours avec la formule de doublement d'angle (appliquée à l'angle $\beta/2$),

$$\cos(\beta) = \cos\left(2\frac{\beta}{2}\right) = \cos^2\left(\frac{\beta}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\beta}{2}\right).$$

On veut éliminer le terme en sinus. Pour cela, on peut utiliser le théorème de Pythagore :

$$\begin{aligned}\sin^2\left(\frac{\beta}{2}\right) + \cos^2\left(\frac{\beta}{2}\right) &= 1\\ \sin^2\left(\frac{\beta}{2}\right) &= 1 - \cos^2\left(\frac{\beta}{2}\right).\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\cos(\beta) = \cos^2\left(\frac{\beta}{2}\right) - \left[1 - \cos^2\left(\frac{\beta}{2}\right)\right] = 2\cos^2\left(\frac{\beta}{2}\right) - 1.$$

3. On remplace $\cos(\beta)$ par sa valeur dans l'équation ci-dessus :

$$\begin{aligned}2\cos^2\left(\frac{\beta}{2}\right) - 1 &= \frac{2}{3}\\ \cos^2\left(\frac{\beta}{2}\right) &= \frac{5}{6}.\end{aligned}$$

On a deux possibilités[2] :

$$\cos\left(\frac{\beta}{2}\right) = \sqrt{\frac{5}{6}} = \frac{\sqrt{30}}{6} \text{ ou } \cos\left(\frac{\beta}{2}\right) = -\frac{\sqrt{30}}{6}.$$

De même, comme $\sin^2(\beta/2) = 1 - \cos^2(\beta/2) = 1 - \frac{5}{6} = \frac{1}{6}$,

$$\sin\left(\frac{\beta}{2}\right) = \sqrt{\frac{1}{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6} \text{ ou } \cos\left(\frac{\beta}{2}\right) = -\frac{\sqrt{6}}{6}.$$

Pour finir, l'angle β est dans le coin supérieur droit. Si on le divise par 2, il y a deux possibilités : ou bien $\beta/2$ est dans le coin supérieur droit, ou bien $\beta/2$ est dans le coin inférieur gauche. Autrement dit, ou bien $\cos\left(\frac{\beta}{2}\right)$ et $\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)$ sont tous deux positifs, ou bien ils sont tous deux négatifs. Cela laisse donc deux possibilités :

$$\cos\left(\frac{\beta}{2}\right) = \frac{\sqrt{30}}{6} \text{ et } \sin\left(\frac{\beta}{2}\right) = \frac{\sqrt{6}}{6}$$

ou

$$\cos\left(\frac{\beta}{2}\right) = -\frac{\sqrt{30}}{6} \text{ et } \sin\left(\frac{\beta}{2}\right) = -\frac{\sqrt{6}}{6}.$$

On pourra remarque que, si $\cos\left(\frac{\beta}{2}\right) > 0$ et $\sin\left(\frac{\beta}{2}\right) < 0$, alors $\sin(\beta) = 2\cos\left(\frac{\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\beta}{2}\right) < 0$, ce qui contredit l'énoncé. De même si $\cos\left(\frac{\beta}{2}\right) < 0$ et $\sin\left(\frac{\beta}{2}\right) > 0$. C'est pour cela que seules les deux possibilités ci-dessus restent.

2. Une erreur dans l'énoncé laissait suggérer qu'il n'y en avait qu'une possible. Cela n'a pas été pénalisé.