Devoir surveillé n° 1 de géométrie

30 octobre 2020 – Durée : 2 heures

Les calculatrices, documents et téléphones portables sont interdits.

Pour les figures, des dessins à main levée suffisent.
Attention : ce sujet fait 2 pages.

Rappels : $\cos(\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$, $\cos(\frac{\pi}{4}) = \sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$, $\sin(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$, $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$.

Exercice 1.
1. Dessinez sur le cercle trigonométrique le point correspondant à chacun des réels suivants :

$$\frac{5\pi}{3}, \quad \frac{13\pi}{5}, \quad -\frac{6\pi}{2}, \quad \frac{1802\pi}{3}$$

(si vous dessinez les 4 points sur le même cercle, indiquez quel point correspond à quel réel).
2. Donnez le cosinus et le sinus de $\frac{5\pi}{3}$, $-\frac{6\pi}{2}$, $-\frac{3\pi}{4}$, $\frac{1802\pi}{3}$. Vous expliquerez la démarche utilisée pour se ramener à des cosinus et à des sinus d'angles classiques (on rappelle que les angles classiques sont 0, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}, \pi$).

Exercice 2. On se place dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On considère les points $A\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$ et $D\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$.
1. Faites une figure.
2. Calculez les coordonnés des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$. Le quadrilatère $ABCD$ est-il un parallélogramme ?
3. Calculez les coordonnées du point E tel que le quadrilatère $ABDE$ soit un parallélogramme.
4. Que pouvez-vous dire des vecteurs $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{CE}$?

Exercice 3. On se place dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On considère les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}-6\\2\end{pmatrix}$.
1. Représentez sur une figure les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ ainsi que le vecteur $\vec{u} + \vec{v}$.
2. Donnez les coordonnées du vecteur $\vec{u} - 2\vec{w}$.
3. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{w}$ sont-ils colinéaires ? Et les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$?

Exercice 4.
1. Déterminez tous les réels $x \in \mathbb{R}$ tels que $\sin(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
2. Déterminez tous les réels $y \in]-\pi, \pi]$ tels que $\cos\left(y + \frac{\pi}{3}\right) = 0$.

Exercice 5. Soit $\alpha \in [-\pi, -\frac{\pi}{2}]$ un réel tel que $\cos(\alpha) = -\frac{2}{5}$.
1. Quel est le signe de $\sin(\alpha)$?
2. Calculez $\sin^2(\alpha)$ puis $\sin(\alpha)$ *(on ne demande pas la valeur de α).*
3. Placez précisément l'angle α sur le cercle trigonométrique, en justifiant votre méthode.

Exercice 6. Soit β un réel tel que $\cos(\beta) = \frac{2}{3}$ et $\sin(\beta) = \frac{\sqrt{5}}{3}$.
1. Calculez $\cos(2\beta)$ et $\sin(2\beta)$.
2. Montrez que $\cos(\beta) = 2\cos^2(\beta/2) - 1$.
3. Déduisez-en la valeur de $\cos(\beta/2)$, puis celle de $\sin(\beta/2)$.

Barème indicatif : 3 – 4 – 3,5 – 3 – 3 – 3,5