TICE Probabilités et statistiques 2 : Lois de probabilité et intervalles de fluctuation avec Geogebra

Prenez une feuille pour écrire vos commentaires.

1 Représentation des lois gaussiennes

Ouvrir Geogebra, afficher les fenêtres `Algèbre` et `Graphique`. Dans les options, régler les arrondis au millième. Enregistrer le fichier sous `Gaussienne.ggb`.
L'objectif de l'exercice est d'interpréter graphiquement la loi normale à l'aide de sa densité et de sa fonction de répartition, ainsi que les probabilités associées.

1. Densité et fonction de répartition de la loi gaussienne centrée réduite
2. A l'aide de la commande `Normale`, représenter la courbe de la densité d'une variable N suivant la loi normale centrée réduite. Créer un curseur positif noté a ; régler l'incrémentation au centième.
   (a) Quel lien y a-t-il entre la courbe de la densité de N et $p_a = P(N \in [-a, a])$? Représenter graphiquement cette valeur (on pourra utiliser la commande `IntégraleDomaine`). Faire varier a et commenter.
   (b) Avec la commande `Normale`, tracer dans la seconde fenêtre graphique la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.
   (c) Afficher dans cette fenêtre le point A de coordonnées (a, p_a). Afficher sa trace et faire varier a (on peut étendre le curseur aux valeurs négatives).

   La **fonction d'erreur** est définie comme :

   $$\mathrm{erf}(x) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$$

   Cette fonction est impaire. Si N suit une loi normale standard, on peut vérifier que $\mathbb{P}(N \leq x) = \frac{1+\mathrm{erf}(x/\sqrt{2})}{2}$.

   (d) Etablir le lien entre le lieu ainsi tracé et la fonction de répartition. Contrôler le résultat obtenu en traçant la courbe du lieu à l'aide d'une commande directe.
   (e) Compléter les titres et légendes des fenêtres.
3. Comparaison des graphes des lois normales
   Ouvrir une nouvelle fenêtre graphique, et masquer la première. Créer 2 curseurs notés m et σ avec $\sigma \geq 0$.
   (a) A l'aide de la commande `Normale`, représenter la courbe de la densité d'une variable X de loi gaussienne de paramètres m et σ.
   (b) Que représentent les paramètres m et σ pour la variable aléatoire X ? Comment les courbes permettent-elles de visualiser ces paramètres ?
   (c) Quelle propriété de symétrie possède cette courbe ? Mettre en évidence cette propriété sur le graphique.
   (d) Par quelle transformation du plan obtient-on la courbe de la densité de X à partir de celle de N lorsque m varie, pour $\sigma = 1$?
   (e) Par quelle transformation du plan obtient-on la courbe de la densité de X à partir de celle de N lorsque σ varie, pour $m = 0$?
   (f) Mettre les titres et les légendes ou commentaires dans les fenêtres graphiques.

2 Intervalles de fluctuations d'une loi gaussienne

Copier le fichier précédent sous le nom `GaussienneIF.ggb`. Supprimer la densité de la loi gaussienne centrée réduite, et indiquer le titre de l'exercice.

1. Variation des fluctuations en fonction de σ.
   (a) Représenter graphiquement la probabilité p_a d'être dans l'intervalle $[-a, a]$ pour la variable X. Faire varier a, commenter.
   (b) Pour $m = 0$ et $\sigma = 1$, fixer a pour que $p_a = 95\%$, noter cette valeur. Faire varier m, commenter.
   (c) On fixe $m = 0$. Faire varier σ, commenter. Pour quelles valeurs de σ la valeur p_a est-elle égale à 68% ? 99,8% ?
   (d) On garde $m = 0$. Trouver des valeurs de a et σ telles que $p_a = 95\%$. Quel lien semble-t-il y avoir entre ces deux paramètres ?
2. Détermination des intervalles de fluctuations gaussiens
   La commande `InverseNormale` calcule, pour une probabilité p donnée, la valeur a vérifiant $P(X \leq a) = p$.
   (a) Déterminer avec la commande `InverseNormale` un intervalle de fluctuations à 95% de la variable de loi gaussienne. Afficher cet intervalle sur l'axe des abscisses avec sa légende.

(b) Créer un curseur entier $1 \leq k \leq 3$. Représenter graphiquement $P(X \in [m - k\sigma, m + k\sigma])$.

(c) Dessiner juste sous l'axe des abscisses l'intervalle $[m - k\sigma, m + k\sigma]$.

(d) Faire varier m puis σ. Commenter.

Pour afficher la valeur d'un paramètre à l'écran, on peut utiliser la commande `Texte`*, ou intégrer des objets dans un champ de texte.*
Le réglage de la couleur se trouve dans l'option `Propriétés/Avancé`*. La couleur est donnée par 3 coefficients variant de 0 à 1.*

3. Intervalle de fluctuation simulé
Dans cette question, m et σ sont fixés. Ouvrir le tableur.
   (a) Dans la cellule A2, simuler une mesure suivant la loi gaussienne de paramètres m et σ.
   (b) Représenter cette valeur numérique sur l'axe des abscisses, en définissant le point associé dans la cellule B2. On colorie ce point en vert si A1 est dans l'intervalle de fluctuations à 95%, en rouge sinon. *On utilise la commande* `Si` *dans les options avancées.*
   (c) Propager la simulation dans les 300 premières cellules de la colonne A, et afficher les points correspondants dans la fenêtre graphique.
   (d) Quelle est la proportion de points rouge ? *utiliser la commande* `NbSi` *pour compter ces points.* Afficher dans la fenêtre graphique le pourcentage des résultats qui sont dans l'intervalle de fluctuation.
   (e) Quel est le lien attendu entre ces résultats de simulation et l'intervalle de fluctuation ? Comment le justifie-t-on ?
   (f) Recalculer à l'aide de la commande clavier `Cmd R`, commenter. Compléter les légendes dans le tableur et la fenêtre graphique, écrire quelques commentaires.

3 Lois binomiales et théorème de Moivre-Laplace

Ouvrir un fichier `Moivre-Laplace.ggb`, afficher les fenêtres `Algèbre` et `Graphique`.

1. Observations du graphe des lois binomiales
Créer 2 curseurs n et p dans la première fenêtre graphique. Représenter le graphe de la loi d'une variable aléatoire X binomiale de paramètres (n, p) à l'aide de la commande `Binomiale`.
   (a) Que s'affiche-t-il dans la fenêtre d'algèbre ? Pourquoi ? Dessiner en pointillés l'axe vertical d'abscisse égal à l'espérance de la variable binomiale représentée (de même couleur que l'histogramme).
   (b) Faire varier les curseurs et commenter. Pour n fixé, quelles sont les valeurs de p pour laquelle l'écart-type semble maximal ? Justifier votre réponse.
   (c) A l'aide du théorème de Moivre-Laplace, représenter la densité de la loi gaussienne ressemblant à la loi de X. Vérifier en variant les curseurs.
2. Représentation de la loi binomiale "centrée réduite".
   (a) En utilisant la commande `Histogramme`, représenter l'histogramme de la variable aléatoire centrée $Y = X - E(X)$.
   Pour entrer les listes d'abscisses ou de hauteurs, utiliser la commande
   `Séquence`*[Expression, variable, de, à].*
   (b) Préciser l'écart-type de Y. Quelle transformation permet d'obtenir le graphe de la loi de Y à partir de celui de X ? Faire varier les curseurs. Commenter.
   (c) A p fixé, que peut-on dire de l'écart-type de X en fonction de n ? On cache maintenant l'histogramme de la question 1 et son axe.
   (d) Pour quelles valeurs de (n, p) la loi de Y est-elle symétrique ? Préciser l'axe dans ce cas.
   (e) Représenter dans la seconde fenêtre graphique, l'histogramme de la variable $Z = Y/\sigma(Y)$ (qu'on appelle parfois la loi "centrée réduite" de la loi de X).
   (f) Représenter la densité de la loi normale centrée réduite. Faire varier les curseurs et commenter.