

Billards convexes

Damien THOMINE

Un *billard* est un type de système dynamique : on lance une particule sur une table de billard, et on la laisse se réfléchir sur les bords du billard. On suppose que la particule ne perd pas d'énergie, et peut donc continuer sa course indéfiniment.

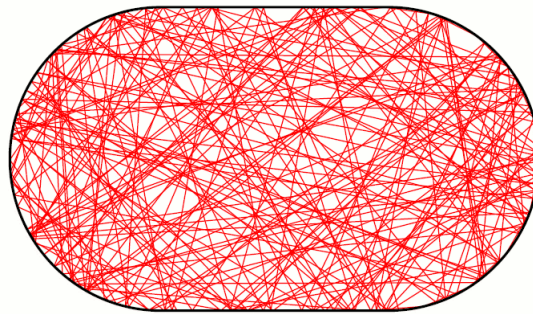


FIGURE 1 – Une trajectoire sur un billard stade.

On souhaite comprendre le comportement de sa trajectoire. Par exemple, est-ce qu'une trajectoire typique va s'approcher de n'importe quel point de la table, ou restera-t-elle confinée dans une sous-partie de celle-ci ?

Le comportement des trajectoires dépend très fortement de la forme de la table ; le système peut être très prévisible, chaotique, ou présenter toute une gamme de propriétés intermédiaires. Le but de ce projet est d'étudier des tables de billard convexes simples : un disque ou une ellipse. Cette étude se fera dans deux directions :

- mathématiquement, par la détermination d'invariants des trajectoires (intégrales du mouvement) ;
- numériquement, par la simulation du système dynamique associé.

Suivant le temps disponible, on pourra s'attaquer à des phénomènes plus fins ayant lieu sur des tables circulaires ou elliptiques (nombre de rotation et existence de trajectoires périodiques, invariants pour des billards dans des ellipsoïdes), ou explorer qualitativement, à l'aide de simulations, des tables plus complexes.

Références

- [1] G.D. Birkhoff, *Dynamical systems*, With an addendum by Jurgen Moser. American Mathematical Society Colloquium Publications, Vol. IX American Mathematical Society, Providence, R.I. 1966. Ré-édition de l'ouvrage de Birkoff (1927). Chapitres VI.6, VIII.12 et VIII.13.
- [2] N. Chernov et R. Markarian, *Chaotic billiards*, Mathematical Surveys and Monographs, 127. American Mathematical Society, Providence, RI, 2006. Chapitre 1 uniquement.

- [3] S. Tabachnikov, *Geometry and billiards*, Student Mathematical Library, 30. American Mathematical Society, Providence, RI; Mathematics Advanced Study Semesters, University Park, PA, 2005.